

Eugenio Beltrami

OPERE MATEMATICHE

DI

EUGENIO BELTRAMI

PUBBLICATE PER CURA

DELLA

FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA R. UNIVERSITÀ DI ROMA.

TOMO PRIMO

CON RITRATTO E BIOGRAFIA DELL'AUTORE.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1902

PREFAZIONE

ALLE

OPERE MATEMATICHE DI EUGENIO BELTRAMI.

Ai Lettori,

Nella seduta straordinaria del 19 febbrajo 1900 la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, appresa la dolorosa notizia della morte dell'illustre ed amato collega prof. EUGENIO BELTRAMI, tra il generale rimpianto, deliberava di aprire una sottoscrizione internazionale allo scopo di onorare, in quel modo che sarebbe poi ritenuto il migliore, la memoria dell'uomo insigne immaturamente strappato alla scienza ed all'insegnamento. Fu in seguito concorde opinione che il migliore modo di onorare chi aveva consacrata l'intera sua vita agli studî fosse quello di riunire in una nuova e completa edizione i suoi scritti scientifici: monumentum ære perennius.

La Facoltà affidava al prof. CREMONA, all'attuale Segretario prof. CASTELNUOVO ed al sottoscritto Preside l'incarico di porre in atto la presa deliberazione, e per quanto grave esso fu accettato, senza riguardo alle nostre forze, sentendoci trascinati dall'affetto e dalla venerazione per l'amico che ha lasciato grande rimpianto di sè, e fiduciosi che non ci mancherebbe l'assistenza dei colleghi di ogni parte d'Italia. E ci è grato di porgere quì a nome della Facoltà i più vivi ringraziamenti ai professori BIANCHI, BURGATTI, CERRUTI, DINI, PITTARELLI (cui si deve il ritratto riprodotto in questo volume), REINA, VOLTERRA, i quali ci furono cortesi di ajuto sia coll'opera sia col consiglio.

Le signore AMALIA PEDROCCHI-BELTRAMI, ELISA BAROZZI-BELTRAMI, vedova la prima, madre la seconda, del nostro amato collega e sue generose eredi, rinunziando ad ogni diritto di proprietà, autorizzarono la presente pubblicazione onde verso di esse, non solo la nostra Facoltà, ma chiunque abbia il culto della Scienza, deve sentirsi grato per aver così facilitato l'attuazione di un'impresa di somma utilità per gli studî matematici.

Abbiamo preferito di attenerci nella pubblicazione, il più strettamente possibile, all'ordine cronologico onde il lettore possa meglio seguire passo a passo lo svolgimento del pensiero dell'Autore, dando però la precedenza ai lavori originali scientifici e rimandando in fine le traduzioni, le biografie, le critiche bibliografiche ed altri simili scritti, se si crederà opportuno di pubblicarli.

In questo volume, il primo dei quattro di cui almeno si comporrà l'intera edizione, si raccolgono le memorie che dal 1861 vanno al 1868, e sebbene rappresentino i risultati dei primi 8 anni di studio, occupano un posto notevole nella Storia della Scienza. Basta ricordare che quì si contengono tra le altre le seguenti Memorie: *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria; Sulla flessione delle superficie rigate; Risoluzione del problema: «Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette»; Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque; Saggio d'interpetrazione della Geometria non-euclidea; Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante.*

A questa breve Prefazione facciamo seguire un estratto della Commemorazione letta dal prof. CREMONA all'Accademia dei Lincei e nella quale ci sembra riprodotta al vivo la nobile figura del nostro compianto amico.

Alla sottoscrizione aderirono amici ed ammiratori di ogni parte del Mondo, rendendoci così possibile di por mano alla impresa che si inizia colla pubblicazione del presente volume. L'edizione è stata assunta dal sig. comm. Dott. ULRICO HOEPLI di Milano, per cui non possiamo, da ora in poi, accogliere nuove sottoscrizioni con diritto ad una copia delle Opere. Essendo però intendimento della Facoltà, col fondo che rimarrà dopo compiuta la pubblicazione, di istituire nel nome venerato del BEL-

TRAMI, un premio da conferirsi ogni anno ad un giovane segnalato negli studî prediletti dal nostro caro Collega, saranno accolte con riconoscenza quelle offerte che venissero fatte per concorrere a questa istituzione, che ha per iscopo di accoppiare nell'animo dei giovani il sentimento di gratitudine a quello di ammirazione pel compianto Maestro.

Abbiamo posto la massima cura affinchè l'edizione riescisse ben corretta; ma se l'opera nostra presentasse qualche manchevolezza accetteremo volentieri consiglio, da qualunque parte ne venga, facendone tesoro per l'avvenire.

La Tipografia Matematica di Palermo cui affidammo l'esecuzione della stampa ha dal canto suo fatto quanto di meglio onde la presente edizione si presentasse anche sotto una forma esteriore decorosa.

Roma, 19 maggio 1902.

Alberto Tonelli
Preside della Facoltà di Scienze
della R. Università di Roma.

EUGENIO BELTRAMI

ESTRATTO DALLA COMMEMORAZIONE

letta da **Luigi Cremona**

alla R. Accademia dei Lincei, nell'adunanza solenne del 10 giugno 1900, onorata dalla presenza delle LL. MM. il Re e la Regina.

. . . .

EUGENIO BELTRAMI nacque a Cremona il 16 novembre 1835 da EUGENIO B. cremonese e da ELISA BAROZZI veneziana, tutt'ora vivente. Ebbe ad avo paterno GIOVANNI BELTRAMI (nato nel 1779 a Cremona, e morto ivi nel 1854) insigne incisore in pietre dure (cui fu mecenate il BEAUHARNAIS), autore di bellissimi camei e di altri lavori divenuti celebri *).

Anche il padre, EUGENIO, fu valente artista, sopra tutto come miniatore, studiò prima a Bergamo sotto il DIOTTI, poi a Milano sotto HAYEZ, donde passò all'Accademia di Venezia, e colà conobbe e sposò ELISA BAROZZI. Partecipò ai moti patriottici del 1848, nel quale anno andò al campo di re CARLO ALBERTO, delegato dai suoi concittadini. Dopo i disastri di quella guerra, si rifugiò in Piemonte e di là in Francia, donde più non fece ritorno in patria.

La madre ELISA, uscita da quella famiglia BAROZZI la cui nobiltà risale a tempi remoti, e che contò magistrati e guerrieri segnalati nella storia della Repubblica di Venezia, è donna d'ingegno non comune, assai colta nella musica, in cui è stata allieva della celebre GIUDITTA PASTA, e conosciuta per lodate composizioni poetiche e musicali.

---

*) Vedi: ANTONIO MENEGHELLI, *Giovanni Beltrami insigne incisore in gemme*. Padova, 1839.

Il nostro EUGENIO succhiò in famiglia l'amore alle arti belle ed alla patria; fanciullo e giovinetto fu educato dalla madre e dall'avo paterno. Frequentò le scuole elementari, ginnasiali e liceali di Cremona, salvo per un anno, 1848-49, durante il quale, in seguito alla catastrofe della guerra in Lombardia, avendolo la madre portato seco a Venezia ancora libera, fece la quarta grammatica in quel Ginnasio che ora ha nome da Marco Polo.

Andò poi all'Università di Pavia e fu ascritto a quella Facoltà matematica negli anni scolastici 1853-54, 1854-55, 1855-56. Nel novembre 1853 era entrato nel Collegio Ghislieri per avervi ottenuto un posto di fondazione Castiglioni, ma nel febbraio 1855 ne fu espulso con altri, accusati di aver promosso disordini in odio al Rettore Ab. ANTONIO LEONARDI, sui quali investigò quella maligna polizia, che fiutava complotti e ribellioni anche fra i chiassi della scolaresca.

La perdita del posto nel Collegio Ghislieri peggiorò le strettezze economiche già gravi per la morte del nonno BELTRAMI, il quale sinchè visse avea provveduto alla nuora ed al nipote. Perciò a questi divenne impossibile indugiarsi all'Università e sostenervi i così detti *esami di rigore* che dovevano precedere la laurea dottorale; e fu costretto a troncare d'un tratto la lieta vita di studente ed a portarsi (nel novembre 1856) a Verona ad assumervi un impiego amministrativo, ottenuto per le aderenze di uno zio materno *): l'impiego cioè di segretario particolare dell'ingegnere DIDAY, direttore dell'esercizio delle strade ferrate del Lombardo-Veneto.

Quell'ufficio non desiderato da lui, ma accettato, come quello che gli dava i mezzi, venuti totalmente a mancare, di mantenere sè e la madre, gli tolse di attendere inoltre a studî e ad esami. E allora cominciò per il nostro BELTRAMI quell'esistenza di severo, inappuntabile adempimento de' proprî doveri che non si smentì mai, nemmeno per un giorno, sino alla morte.

Quelle strade ferrate erano esercitate da una Società privata, e l'ingegnere DIDAY, eccellente persona, ebbe sempre pel Nostro cure benevole, quasi paterne; tuttavia la polizia austriaca, sospettosa di tutto e di tutti,

*) Il comm. NICOLÒ BAROZZI, ora direttore del Museo archeologico di Venezia.

sospettò anche di quel giovane silenzioso e riservato, i cui parenti, del resto, erano inscritti sul così detto *libro nero*. Con lettera 10 gennaio 1859 del direttore generale BUSCHE, il BELTRAMI venne *per motivi politici* licenziato. Se non che, la fortuna sua si trovò d'accordo con quella d'Italia; pochi mesi dopo, il cannone di Magenta rese libera la Lombardia, e l'ingegnere DIDAY trasferì l'ufficio a Milano conducendo seco il suo segretario particolare.

A Milano divenne nel Nostro irresistibile la vocazione, già presentita a Verona, verso gli studî matematici; ond'è che, vincendo l'innata modestia, egli si fece a domandare i consigli di FRANCESCO BRIOSCHI che aveva avuto a professore a Pavia nell'anno 1855-56, ed a cercare la compagnia di giovani già avviati negli studî e nell'insegnamento. Dotato di una coscienza limpidissima, ben rara a venticinque anni, vide in piena luce la via che poteva e doveva battere per secondare quella vocazione.

Ad un amico egli scriveva nel dicembre 1860 nei termini seguenti:

« ... Il corso universitario, io l'ho compiuto (parte per leggerezza, « parte per quell'indolenza che accompagna ordinariamente il malanimo « cagionato dalle frequenti avversità casalinghe) seguendo il malvezzo di « studiare quel tanto che basti per passare gli esami. Perdetti poi due « anni *) in occupazioni affatto aliene dalle mie tendenze. Dopo questa « dura prova, formai recisamente il proposito di rifarmi a studiare la ma- « tematica, e (questa è la sola cosa di cui sinceramente mi lodo) tolsi a « studiare con tutta diligenza una dopo l'altra l'aritmetica, l'algebra, la geo- « metria, la trigonometria, l'algebra superiore e il calcolo, come avrebbe « fatto uno che avesse percorso tutt'altra Facoltà, che la matematica ». — Aggiunge di avere studiato il calcolo sul trattato di BORDONI, i determinanti di BRIOSCHI e buona parte della geometria analitica di MONGE; e conchiude: « Ecco la mia suppellettile scientifica: sento che è molto scarsa. « Sopratutto mi sta assai sul cuore d'essere *tamquam tabula rasa* delle dot- « trine spettanti al calcolo delle variazioni, ai lavori di JACOBI e di ABEL, « alle ricerche di GAUSS sulle superficie, ecc. ».

---

*) I primi due anni di Verona.

Sì, la suppellettile era scarsa rispetto all'alta mèta alla quale egli tendeva; ma non già per un giovane forzatamente assorbito dai doveri d'un ufficio amministrativo, che ogni giorno più gli veniva a noia. Per liberarsene, cercò un impiego nell'insegnamento secondario; ma gli fu d'ostacolo la mancanza della laurea. Questa fu anche cagione che venisse respinto (ben tre volte) dai concorsi ai posti di sottotenente nel Genio militare, ai quali s'era presentato, perchè « nell'attuale rimutazione della pa-« tria nostra (com'egli si esprime in una lettera del 15 dicembre 1860), « mi doleva al sommo di dovere per circostanze imperiose, ma ignote agli « altri, restarmi completamente estraneo al movimento universale ».

A breve andare però, anzi quasi di slancio, il valore del giovane matematico si rivelò a chi lo poteva apprezzare, ed ebbe il suo premio. Due memorie di lui uscirono negli *Annali di Matematica* editi a Roma dal TORTOLINI; su di esse fu chiamata l'attenzione del BRIOSCHI, allora segretario generale al Ministero dell'Istruzione; e il BELTRAMI, senz'altro, fu con decreto 18 ottobre 1862 nominato professore straordinario di algebra complementare e di geometria analitica nell'Università di Bologna.

Svincolato dall'ufficio delle strade ferrate, che aveva tenuto per sei anni, e dove s'era guadagnata la stima e l'affetto dei capi e dei colleghi, il professore novello, seco conducendo la madre dalla quale non si era mai diviso, recavasi a Bologna, e saliva su quella cattedra che era la mèta agognata, e che sentiva di poter tenere con onore.

Ma non passarono molti mesi e già il BELTRAMI era chiamato ad altra sede. Proclamato il Regno d'Italia, il Governo del Re si studiava di attrarre i migliori ingegni e i giovani più promettenti alle cattedre nuovamente istituite nelle Università. Mancato ai vivi nel marzo 1863 il MOSSOTTI, a Pisa primeggiava nelle scienze esatte ENRICO BETTI, ed a proposta di lui fu offerta al BELTRAMI la cattedra di geodesia in quella Università, col grado di professore ordinario. L'impreveduta e, per tutt'altri, seducente proposta, per poco non fu, per modestia, ricusata dal Nostro.

Chiese il consiglio ad un amico in questi termini: « Io sarei deter-« minato di rifiutare l'offerta fattami dal BETTI, per più ragioni. Prima di « tutto per la necessità di mutare l'indirizzo dei miei studî, il che porta

« sempre con sè degli inconvenienti e dei perditempi, tanto più che par-
« landomi il Betti di studî preparatorî da farsi in un Osservatorio, pare
« che le materie da trattarsi nella nuova cattedra non debbano essere pu-
« ramente teoriche. In secondo luogo la cattedra di introduzione al cal-
« colo mi piace di più e per la natura dell'argomento che ne forma l'og-
« getto, e per la maggior latitudine che lascia nella scelta degli studî. Fi-
« nalmente mi spiacerebbe occupare un posto che l'opinione pubblica ame-
« rebbe meglio probabilmente affidare ad un distinto cultore di studî affini, vo-
« glio dire al Codazzi; e che, anche prescindendo da ciò, potrebbe essere
« ambìto da professori più provetti di me e già benemeriti dell'insegnamento.
« Quanto al vantaggio pecuniario che potrei avere dalla nomina a profes-
« sore ordinario, esso non è che momentaneo, in quanto che io ho a
« sperare lo stesso risultato dopo un tirocinio più o meno lungo anche
« nel posto che occupo adesso, e senza abbandonare l'Università in cui
« ti ho a collega. Comunque sia, non ho voluto rispondere al Betti prima
« d'aver chiesto il tuo consiglio, che ti prego volermi far conoscere libe-
« rissimamente ».

A questa lettera datata da Venezia 16 agosto 1863, l'amico consultato rispose esortando e persuadendo ad accettare. Ma nei passi ora citati, come risplende già l'anima onesta e pura del Beltrami! e come quei tempi e quegli uomini erano diversi da tempi e da uomini posteriori, quando fu veduta una folla di postulanti far ressa alle porte del Ministero e del Consiglio superiore dell'Istruzione!

Il Beltrami cedette ed accettò la cattedra di Pisa, dove si recò ai primi di febbraio 1864. Aveva insegnato a Bologna per un solo anno scolastico; indi, ottenuta licenza per l'indugio, aveva dimorato in Milano per alcuni mesi (da ottobre a tutto gennaio) che consacrò a studî preparatorî per la nuova cattedra, lavorando con l'astronomo Schiaparelli, salito poi ad altissima fama, onore della scienza e dell'Italia. « Stiamo cal-
« colando (scriveva egli il 26 novembre 1863) la compensazione della rete
« trigonometrica che venne formata nel 1843 per servir di base alla pianta
« di Milano. Il problema si riduce a risolvere diciotto equazioni lineari a
« diciotto incognite, ed è precisamente ciò che da quattro o cinque giorni

« ci occupa esclusivamente, colla speranza di finire oggi o domani. È un « buon esercizio di applicazione del metodo dei minimi quadrati ».

A Pisa strinse col BETTI una amicizia fraterna, durata quanto la vita, ed ebbe frequente consuetudine col RIEMANN, che per ragioni di salute aveva fissato la sua dimora in quella città: i colloqui con questi due eminenti matematici e l'ulteriore corrispondenza epistolare col BETTI esercitarono grande influenza sul BELTRAMI e sull'indirizzo delle sue ricerche scientifiche *).

Nell'Ateneo pisano non rimase che tre anni scolastici; quel clima si mostrò contrario alla salute della sua diletta madre, così che il BELTRAMI desiderò ed ottenne, nel settembre 1866, di essere restituito all'Università di Bologna, occupandovi la cattedra di meccanica razionale: disciplina codesta verso la quale egli si sentiva, meglio che verso la geodesia, inclinato. In quest'insegnamento e nel clima salubre di Bologna egli si trovò soddisfatto e tranquillo per buon numero di anni.

Nel febbraio 1868 condusse in moglie AMALIA PEDROCCHI veneziana, che gli è stata compagna amorosa e fida per tutta la seconda metà della vita, circondandolo delle assidue cure del più tenero affetto, e che ora sopravvive a piangerlo, inconsolabile e derelitta.

Nel settembre 1870 Roma era stata restituita all'Italia e poi vi si era insediato il governo del nuovo Regno. Divenuto ministro dell'Istruzione ANTONIO SCIALOJA, questi si accinse con nobile ardore a rialzare le sorti dell'Università romana, chiamando valorosi scienziati ad occuparne le cattedre vacanti. Dei desiderati e ricercati fu uno il nostro BELTRAMI, il quale si lasciò persuadere nell'ottobre 1873 a muoversi da Bologna, conservata la cattedra di meccanica razionale, come professore ordinario, e aggiuntovi l'incarico di un corso d'analisi superiore.

A questo mutamento di sede il Nostro era stato però alquanto reluttante: lo tratteneva il pensiero della madre, prevedendo di non poterla trasportare a tanto maggiore distanza dai genitori che essa ancora

*) CERRUTI, nei Rendiconti dei Lincei, 4 marzo 1900.

aveva più che ottuagenarî a Venezia; il quale molesto pensiero accresceva le dubbiezze proprie dell'indole sua d'uomo tranquillo, tutto dedito alla scienza ed alla scuola. Tuttavia lo vinsero per allora le istanze vivissime degli amici; ed il BELTRAMI accettò e colla moglie si trasferì a Roma.

Se non che, non andò molto ch'egli credette aver ragione di pentirsene. A Roma gli parve che il riordinamento universitario, promesso e sperato tale da compensare le agitazioni proprie di una grande città, fosse di dubbia e lontana attuazione; lo spaventarono o disgustarono le difficoltà del nuovo assetto, minaccianti le sue aspirazioni alla quiete per gli studî prediletti; e, peggio ancora, lo impensierirono timori per la salute della moglie, alla quale sembrava non confacente l'aria della città eterna, che per pregiudizî non ancora smentiti si accusava d'insalubrità. Perciò il Nostro aperse l'orecchio a seducenti proposte che gli venivano da altri Atenei; e siccome da qualche tempo egli aveva rivolto i suoi studî alle applicazioni dell'analisi alla fisica, così si determinò a chiedere e ottenne il passaggio all'Università di Pavia, dove infatti andò nell'ottobre 1876, ad occuparvi la cattedra di fisica matematica, coll'incarico di un corso di meccanica superiore. Non è a dire quanto dolesse ai colleghi di quì la partenza del BELTRAMI. Essi l'accompagnarono coll'augurio che nuovi casi lo restituissero a Roma in tempo non lontano: ma l'augurio non fu esaudito che quindici anni dopo, nel 1891 *).

A Pavia il BELTRAMI trovò, non clima migliore, ma quiete maggiore ed altri amici, fra i quali carissimo FELICE CASORATI, che gli tenne grata compagnia per quasi quattordici anni. Un po' più tardi, cioè nel 1880, si unì ad essi EUGENIO BERTINI. Morto immaturamente l'ottimo CASORATI nel settembre 1890, il BELTRAMI n'ebbe una tristezza invincibile e sentì l'amarezza dell'isolamento. E poichè e a lui e più all'amata consorte le nebbie del Ticino non erano riuscite così propizie come sul principio s'era lusingato, si arrese ai rinnovati inviti degli amici di Roma.

Per tal modo a cominciare dall'anno scolastico 1891-92 il BELTRAMI fu restituito all'Ateneo della Capitale, dove rientrò desiderato e acclamato

*) CERRUTI, l. c.

da colleghi e da scolari. E con noi rimase sino a che una morte immatura non ce lo rapì per sempre, il 18 febbrajo 1900, infliggendo una perdita gravissima e irreparabile alla scienza ed alla patria.

Dopo aver narrato la carriera scolastica del BELTRAMI, dirò brevissimamente della sua attività scientifica. Egli è stato quello che gli inglesi dicono un *self-made man*: non fu l'allievo di una determinata scuola, o di questo o quel maestro; dopo i corsi universitarî, superficialmente seguiti, come egli stesso confessava, e dopo alcuni anni di occupazioni e lavori burocratici, rifece da capo e da sè solo la sua educazione scientifica. Egli, sempre modesto, si professava grato a consigli ricevuti; ma del resto studiò ed apprese tutto da sè. E studiò così bene, così poderosamente e così rapidamente, che in pochissimi anni si trovò in possesso delle dottrine più alte e potè intraprendere e condurre a buon fine difficili ricerche originali.

Nei pochi anni di Pisa, l'indole della sua cattedra lo portò allo studio delle superficie nell'indirizzo dato da GAUSS; ed in particolare ad occuparsi della teoria matematica delle carte geografiche. Di tali studî diede mirabili saggi nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria,* e nella memoria *delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.*

Egli stesso racconta in una lettera del 25 dicembre 1872 ad ENRICO D'OVIDIO, come fosse condotto a cercare le superficie rappresentabili sopra un piano per guisa che le loro linee geodetiche siano figurate da linee rette; e come risolvesse il problema in una memoria del 1866, dimostrando che tali superficie devono essere di curvatura costante *). Di quì fu breve il passo a quella *interpetrazione della Geometria non-euclidea,* che proiettò una luce inaspettata nella controversia allora agitata intorno ai principî fondamentali della Geometria ed ai concetti di GAUSS e LOBATSCHEWSKY. E subito dopo, svolgendo l'idea madre della predetta memoria del 1866 e coordinandola ai principî tracciati da RIEMANN in un celebre lavoro postumo, allora da poco venuto in luce, pubblicò le memorie *sulla teoria degli spazi di curvatura costante, sulle superficie di area minima* e *sui parametri differenziali.*

*) E. D'OVIDIO, negli Atti dell'Accademia di Torino, 25 febbrajo 1900.

L'eleganza e la genialità di cotesti lavori diedero al BELTRAMI quasi di slancio quella riputazione che si andò sempre più diffondendo, sino a divenire ammirazione universale.

Le questioni sino allora trattate, altamente suggestive di meditazioni sulla natura dello spazio fisico, e d'altra parte i metodi analitici da lui usati nella geometria differenziale, applicabili anche nella meccanica e nella fisica matematica, lo attirarono quasi spontaneamente verso i problemi proprî di questi due rami della scienza. Ai quali studî di analisi applicata egli era del resto mirabilmente preparato, sia per gli insegnamenti di geodesia e di meccanica, tenuti a Pisa e a Bologna, sia per quell'influenza del BETTI che già ho accennata, sia per una tendenza del suo ingegno che le matematiche concepiva nella loro genesi storica, come mezzo per lo studio della natura, ed era meno inclinato alle astratte speculazioni dell'analisi pura: tanto che, anche nei pochi suoi lavori strettamente analitici, si intravedono quasi immediate le applicazioni a cui mira, anzi può dirsi che queste reggono e promuovono le ricerche di analisi *).

Lo strumento, del quale, oltre all'intuizione geometrica, si servì costantemente e che giunse a perfezionare ed a maneggiare da maestro, era bensì l'analisi matematica; ma questa non fu per lui, come talvolta per altri insigni, per es. per BRIOSCHI, scopo a sè stessa. Nella elegante commemorazione del suo predecessore nella presidenza dell'Accademia dei Lincei **), il BELTRAMI distinse nell'analisi matematica due tendenze o scuole: la classica rappresentata da EULERO e da JACOBI, ed un'altra germogliata dalle opere di LAGRANGE, secondata dai metodi di GAUSS e di DIRICHLET, e definitivamente maturata con CAUCHY e con RIEMANN. Delineata questa giusta distinzione, il Nostro dimostrò chiaramente che BRIOSCHI appartenne alla prima scuola; ed ora si può affermare con pari sicurezza che BELTRAMI è un esempio, altrettanto splendido, della seconda tendenza.

A cominciare dal 1871 BELTRAMI dedicò un'estesa serie di lavori alla

*) SOMIGLIANA, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1 marzo 1900.

**) Adunanza solenne del 12 giugno 1898.

cinematica dei fluidi, alla teoria del potenziale, ed a quelle dell'elasticità, della luce, dell'elettricità, del magnetismo e della propagazione del calore, abbracciando quasi tutto il vastissimo campo della fisica matematica.

Nello studio delle equazioni generali dell'elasticità si trovò ricondotto alle sue celebri ricerche di geometria, poichè ebbe a scoprire che le equazioni di LAMÉ sono vincolate al postulato euclideo sullo spazio. Potè quindi spontaneamente estenderle agli spazî di curvatura costante, aprendo nuovi orizzonti alla teoria dell'elasticità. E pensò subito, sebbene con prudenti riserve, a giovarsi di codesta generalizzazione, per tentare di chiarire le oscurità delle teorie del MAXWELL, dirette a sostituire, secondo le idee di FARADAY e di W. THOMSON *), alle azioni a distanza, quelle fra i punti contigui di un mezzo continuo diffuso in tutto lo spazio **). Dell'arduo problema il Nostro fece una discussione completa che lo condusse a risultato negativo, senza però che egli abbia voluto concluderne il rigetto della dottrina di MAXWELL.

La grande innovazione dello scienziato inglese risiede nelle equazioni differenziali colle quali egli rappresenta l'universalità dei fenomeni elettrostatici, elettrodinamici ed elettromagnetici, ed alle quali le meravigliose scoperte di HERTZ, illustrate ed ampliate dal nostro RIGHI, hanno dato credito ed appoggio. MAXWELL le deduce per divinazione, più che non le dimostri, dalle equazioni di HAMILTON della meccanica. BELTRAMI invece ha proposto di stabilirle partendo dal principio di d'ALEMBERT generalizzato ed esteso all'elettrodinamica: metodo che, senza nulla mutare alla sostanza delle idee di MAXWELL, conduce più rapidamente e più sicuramente allo scopo ***).

Per tutto l'ultimo periodo della sua attività scientifica BELTRAMI continuò a consacrare lunghe meditazioni e importanti lavori ai concetti del sommo fisico di Cambridge, concetti la cui importanza dal punto di vista sperimentale è andata via via crescendo, fino ad acquistare un dominio

*) LORD KELVIN.

**) SOMIGLIANA, l. c.

***) MAURICE LÉVY, nei « Comptes rendus », 12 marzo 1900.

quasi assoluto nel nostro modo di concepire i fenomeni elettrici e magnetici *).

Gli scritti scientifici del BELTRAMI superano il centinajo. In tutti, all'importanza ed elevatezza della materia va congiunta la forma eletta, insuperabile per lucidità ed eleganza di dettato. Felice connubio dell'intuizione geometrica colle finezze più riposte dell'analisi, e vasta comprensione di metodi generali con una rara abilità nel piegarli alle applicazioni particolari assicurano ai lavori del Nostro un posto durevole nella storia delle matematiche, pur prescindendo dalle idee nuove e dai nuovi risultati che l'universale consenso degli studiosi gli riconosce **).

E quale lo scrittore tale era il maestro. Coloro che ebbero la fortuna di assistere alle sue lezioni attestano che le dottrine più ardue e spinose acquistavano dal magistero della sua parola tale grado di evidenza e di semplicità da generare, in chi l'ascoltava, l'illusione che avrebbe saputo pervenire agevolmente da sè alla scoperta delle verità dichiarate dal professore ***).

Tali erano l'ingegno e la valentia scientifica e didattica del BELTRAMI; nè ai confini pur remoti delle matematiche si arrestava il sapere di lui; chè egli possedeva coltura non comune e varia, parola facile, arguta, adorna, come di chi ha domestichezza cogli studî letterarî. Aveva una rara conoscenza scientifica della musica, della quale era anche esecutore abile e ispirato †). Gli era stata maestra fin dai più teneri anni la madre; poi s'era esercitato con AMILCARE PONCHIELLI, suo coetaneo e concittadino. Questo talento musicale egli nascondeva con ritrosa modestia, come se temesse d'essere accusato d'infedeltà verso la gelosa dea, la matematica, alla quale si era tutto consacrato; ma i pochissimi intimi e intelligenti attestano ch'egli sapeva eseguire maestrevolmente al pianoforte i capolavori di BACH, BEETHOVEN, MENDELSSOHN, SCHUMANN ††).

---

*) SOMIGLIANA, l. c.

**) CERRUTI, l. c.

***) CERRUTI, l. c. — FRATTINI, nel Periodico di Matematica, marzo-aprile 1900.

†) CELORIA, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1 marzo 1900.

††) CASSANI, Atti dell'Istituto Veneto, 25 febbrajo 1900.

Da un foglietto trovato tra le carte del Nostro, e che sembra essere la minuta di una lettera

Rigido con sè stesso e indulgente verso gli altri, spirito calmo, sereno; affabile, cortese di modi per innata gentilezza dell'animo, esercitava,

---

all'amico dott. GUSTAV WOLFF (nel 1886-87 professore al Conservatorio di Lipsia), togliamo il brano che segue:

« Il y a entre la musique et les mathématiques un rapprochement que l'on n'a peut-être pas « encore remarqué. Si l'on conçoit le domaine général des idées comme étant un système continu, le « champ des idées mathématiques n'en forme qu'une très faible partie; ou, pour mieux dire, elles n'y « figurent, à mon avis, que comme les raies de FRAUNHOFER dans l'étendue du spectre solaire. Ainsi, « il y a une gamme mathématique comme il y a une gamme musicale. De ce point de vue, un rai-« sonnement mathématique est comme une suite d'accords tirés de la lyre intellectuelle formée par les « raies mathématiques de la pensée humaine, et la découverte d'une branche nouvelle de mathémati-« ques est comparable à celle d'une nouvelle modulation harmonique. Mais tandis qu'on peut très bien « déplacer la gamme musicale sans altérer les rapports harmoniques, on ne peut pas déplacer la gamme « mathématique; du moins l'on n'a pas d'exemple, dans l'histoire de la science, que le même théo-« rème se soit présenté, à différentes époques, ou chez différents peuples, dans des *tons* différents. Les « accords mathématiques ont donc une existence absolue, tandis que les accords musicaux n'en ont « qu'une relative.

« *P.S.* Si ces idées paraissent à M. WOLFF trop étranges ou trop compromettantes, je suis prêt « à les supprimer; pourvu qu'il laisse toujours subsister entre son esprit de musicien et mon esprit de « mathématicien ce seul accord véritablement parfait, qui représente l'amitié la plus sincère.

E. B.»

A proposito del ravvicinamento fra la matematica e la musica, mi sia concesso di citare alcuni passi di altra lettera (più antica) del Nostro, provocata da una nota dell'illustre SYLVESTER che si legge a pag. 613 della Memoria *On the real and imaginary Roots of algebrical Equations* (Philosophical Transactions, parte III, 1864). La nota è la seguente:

« Herein I think one clearly discerns the internal grounds of the coincidence or parallelism, which « observation has long made familiar, between the mathematical and musical ἔθος. May not Music be « described as the Mathematic of sense, Mathematic as Music of the reason? the soul of each the « same! Thus the musician *feels* Mathematic, the mathematician *thinks* Music, — Music the dream, « Mathematic the working life — each to receive its consummation from the other when the human « intelligence, elevated to its perfect type, shall shine forth glorified in some future MOZART-DIRICHLET « or BEETHOVEN-GAUSS — a union already not indistinctly foreshadowed in the genius and labours of « a HELMHOLTZ! ».

E BELTRAMI nella sua lettera da Pisa, 7 aprile 1865:

« Credo che ci sia molto di vero nel pensiero del SYLVESTER che mi trascrivesti. Io non ho mai studiato profondamente la così detta *Armonia,* che è quella parte della scienza musicale che può in certo qual modo riguardarsi come dottrina razionale, avendo i suoi postulati ed i suoi assiomi, da cui tutto il resto è dedotto. Ma per quel poco che ne so, parmi infatti che il processo mentale ad essa applicabile sia identico o poco meno con quello delle matematiche. Mettendomi per un istante nell'ipotesi materialistica, direi quasi che nell'una e nell'altra scienza sono posti in azione gli stessi organi. Quanto poi alla composizione, nel senso più lato, parmi che subentrino altri elementi, assai differenti dai primi. Comunque sia, è notevole che uno dei più grandi armonisti e compositori dei tempi moderni, MEYERBEER, abbia cominciato collo studiare matematiche, nelle quali si addottorò ».

inconsciamente, in chi pur per poco l'avvicinasse, un fascino irresistibile; a Bologna, a Pisa, a Pavia, a Roma, ovunque egli professò, divenne ben presto il centro intorno al quale si adunavano gli studiosi delle più diverse discipline, l'anima di una conversazione geniale e dotta, non mai pedantesca *).

Della sua costante fedeltà al culto della scienza è prova indiscutibile il fatto che, nella sua carriera di oltre trentasette anni, non si lasciò mai adescare, nè per ambizione, nè per guadagno, ad accettare ufficî che lo svagassero dagli studî. Non volle mai far parte di Corpi amministrativi, nè essere Preside di Facoltà o Rettore di Università; accettò soltanto di entrare nel Consiglio superiore dell'Istruzione, mandatovi dai suffragi dei colleghi. Non cercò alcuno degli onori soliti a conferirsi ai dotti, ma li ebbe tutti. L'Accademia di Bologna fino dal 1867, la Società Italiana (dei XL) dal 1870, la R. Accademia dei Lincei dal 1873, l'Istituto Lombardo, l'Accademia di Torino, la Società Reale di Napoli, le Accademie delle Scienze di Parigi, di Berlino, di Monaco, la Società di Gottinga, la Società Matematica di Londra ed altre lo aggregarono a sè come Socio o come Corrispondente. Dottore *honoris causa* delle Università di Kazan (1893) e di Halle (1894). Cavaliere del Merito Civile di Savoia (1879).

Della grande riputazione che egli aveva acquistata nel mondo scientifico, anche presso gli stranieri, mi sia concesso addurre quest'altra prova. Nel 1889 scadeva il quinquennio di professorato straordinario di analisi matematica per la celebre SOFIA KOWALEWSKY all'Università di Stoccolma. Per deciderne la conferma a vita, come professore ordinario, quell'Università chiese i pareri di tre scienziati che riteneva i più autorevoli in quell'indirizzo di studî: HERMITE, BJERKNES e BELTRAMI. I pareri furono tutti e tre onorevoli ed in favore di quel *savant, dont le sexe était aussi exceptionnel que le mérite* (secondo una frase del Nostro, da una lettera del 18 maggio 1889 a HERMITE). Ma non erano compiuti due anni e una morte crudele toglieva immaturamente l'illustre donna all'Università ed alla scienza che da lei attendevano ulteriori frutti del suo miracoloso ingegno.

---

*) CELORIA, l. c.

Ultimo onore la nomina a Senatore del Regno: onore che a lui giunse assai gradito, perchè la sua modestia non gli toglieva di sentirsene degno, e sopratutto perchè, per atto di alta e cavalleresca cortesia, la comunicazione gli venne dall'augusta bocca di re Umberto, nell'adunanza solenne dei Lincei, il 4 giugno 1899.

Ed ora quello spirito eletto non è più fra noi. Se qualche cosa sopravvive oltre la tomba, di certo egli è salito ad un astro superiore, più perfetto del nostro pianeta, ed ivi si delizia nella beatitudine del vedere illuminati e risoluti quei problemi che trascendono l'acume della mente umana, ma spesso la tormentano affannosamente. Di lassù egli implora rassegnazione e pace alle anime desolate delle due infelicissime donne, la madre e la vedova, che gli sopravvivono, anelanti di ricongiungersi a lui.

A me ed a quelli che con me hanno oltrepassata l'età del BELTRAMI, non rimane alcun conforto, se non sia il ricordo della sua cara e preziosa amicizia. Ma i giovani non dimentichino che hanno un tesoro da custodire: l'esempio di una vita immacolata, tutta spesa nel culto della scienza e nella scuola del dovere, e la gloriosa memoria di un altissimo ingegno, che ha onorato la patria e l'umanità.

I.

INTORNO AD ALCUNI SISTEMI DI CURVE PIANE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo IV (1861), pp. 102-108.

È notissimo che il sistema delle traiettorie ortogonali d'una serie d'iperboli equilatere aventi in comune gli assi, è la serie delle iperboli equilatere che hanno per assintoti gli assi delle prime.

Questa proprietà può anche enunciarsi dicendo che, se il sistema delle iperboli equilatere che hanno in comune i due assi, viene ruotato intorno al suo centro per un mezzo angolo retto, il sistema ruotato riesce ortogonale al sistema primitivo.

Sotto quest'ultimo punto di vista si concepisce come la proprietà degli anzidetti sistemi d'iperboli equilatere possa essere suscettibile di generalizzazione. Mi propongo perciò di risolvere il seguente problema generale: *Trovare quei sistemi di curve piane, i quali, venendo ruotati per un angolo dato intorno ad un punto del loro piano, segano i sistemi primitivi sotto un angolo costante parimenti dato.*

In ciò che segue farò sempre uso di coordinate rettangole x ed y, aventi l'origine nel centro di rotazione dei sistemi cercati; denoterò inoltre con α l'angolo di rotazione, e con λ quello d'intersezione delle curve dei due sistemi, misurato procedendo da una curva del sistema primitivo verso una del sistema ruotato. Tanto α quanto λ si riterranno positivi quando saranno misurati nel senso in cui si procede dall'asse delle x positive verso quello delle y positive. È chiaro che si potrà sempre supporre $\lambda < \pi$, $\alpha < 2\pi$.

Indicando con a un parametro variabile da curva a curva, l'equazione di uno dei

sistemi dotati della proprietà in discorso, si potrà mettere sotto la forma:

$$f(x, y) = a. \tag{1}$$

Se questo sistema viene ruotato per un angolo α intorno all'origine degli assi, nel senso in cui si procede dall'asse delle x positive verso quello delle y positive, si trova facilmente che, nella nuova posizione, esso viene rappresentato dall'equazione:

$$f(y \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha,\ y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha) = a, \tag{2}$$

ossia dalla equazione che si ottiene sostituendo rispettivamente ad x ed y, nell'equazione del sistema originario, i binomi:

$$y \operatorname{sen} \alpha + x \cos \alpha, \qquad y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha. \tag{3}$$

Derivando rispetto ad x le due equazioni (1), (2), se ne caveranno due valori di $\frac{dy}{dx}$; indicandoli rispettivamente con $\frac{dy}{dx}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, la condizione perchè le curve dei due sistemi (1) e (2) si seghino sotto l'angolo λ sarà espressa, come è noto, da

$$\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}} = \operatorname{tang} \lambda. \tag{4}$$

Ciò posto, indicando al solito con i l'immaginario $\sqrt{-1}$ e ponendo:

$$y + ix = u, \qquad y - ix = v, \tag{5}$$

facilmente si verifica che, sostituendo nei valori di u e v in luogo di x ed y i binomi (3), le u, v si mutano rispettivamente in $u e^{i\alpha}$, $v e^{-i\alpha}$. Perciò, se si rappresenta con $\varphi(u, v)$ il risultato che si ottiene sostituendo nella funzione $f(x, y)$ i valori di x ed y dati dalle (5), le equazioni dei due sistemi di curve, l'originario ed il ruotato, formate con u e v, saranno rispettivamente:

$$\varphi(u, v) = a, \qquad \varphi(u e^{i\alpha}, v e^{-i\alpha}) = a. \tag{6}$$

Trasformando la (4) per mezzo delle (5) si trova:

$$\frac{\left(\frac{dv}{du}\right) - \frac{dv}{du}}{\left(\frac{dv}{du}\right) + \frac{dv}{du}} = i \operatorname{tang} \lambda,$$

equazione che si può scrivere anche così:

$$\left(\frac{dv}{du}\right) - \frac{dv}{du} e^{2i\lambda} = 0. \tag{7}$$

Ora, dalle (6) si ricava:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} : \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v},$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right) = -e^{2i\alpha} \frac{\partial \varphi(u e^{i\alpha}, v e^{-i\alpha})}{\partial(u e^{i\alpha})} : \frac{\partial \varphi(u e^{i\alpha}, v e^{-i\alpha})}{\partial(v e^{-i\alpha})};$$

quindi, se si pone

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} : \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} = \psi(u, v), \tag{8}$$

è chiaro che si avrà:

$$\frac{dv}{du} = -\psi(u, v),$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right) = -e^{2i\alpha} \psi(u e^{i\alpha}, v e^{-i\alpha}),$$

per cui la (7) diverrà:

$$\psi(u e^{i\alpha}, v e^{-i\alpha}) = e^{2i(\lambda-\alpha)} \psi(u, v). \tag{9}$$

Introduco due nuove variabili p e q, legate alle u e v dalle relazioni:

$$u = e^{i\alpha p}, \qquad v = e^{-i\alpha q}. \tag{10}$$

Con ciò la (9) diventa

$$\psi(e^{i\alpha(p+1)}, e^{-i\alpha(q+1)}) = e^{2i(\lambda-\alpha)} \psi(e^{i\alpha p}, e^{-i\alpha q}),$$

ovvero, fatto

$$\psi(e^{i\alpha p}, e^{-i\alpha q}) = \zeta(p, q), \tag{11}$$

$$\zeta(p+1, q+1) = e^{2i(\lambda-\alpha)} \zeta(p, q). \tag{12}$$

Prendendo i logaritmi iperbolici di quest'ultima equazione si ha

$$\Delta \log \zeta(p, q) = 2i(\lambda - \alpha),$$

dove con Δ è indicata la differenza finita *totale* della funzione $\log \zeta(p, q)$. L'integrale di quest'ultima equazione può mettersi sotto la forma:

$$\log \zeta(p, q) = i(\lambda - \alpha)(p + q) + A,$$

A denotando una funzione di p e di q che non varia cambiando la p in $p + 1$, e simultaneamente la q in $q + 1$, del resto affatto arbitraria.

Si ha quindi, scrivendo per semplicità A in luogo di e^A,

$$\zeta(p, q) = A e^{i(\lambda-\alpha)(p+q)}. \tag{13}$$

Per desumere da questa equazione la forma della funzione ψ è manifesto, per le (10), (11), che basta sostituire nel trovato valore di ζ in luogo di p e di q rispettivamente le quantità $\frac{\log u}{i\alpha}$, $-\frac{\log v}{i\alpha}$. Si ha così, continuando a rappresentare con A il risultato di tale sostituzione nella funzione arbitraria,

$$\psi(u, v) = A e^{\left(\frac{\lambda}{\alpha}-1\right)\log\frac{u}{v}},$$

ossia

$$\psi(u, v) = A\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}. \tag{14}$$

Da questo valore di ψ bisogna finalmente ricavare quello di φ. Per tale uopo si ricordi la (8), ossia la

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \psi(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0.$$

È noto che l'integrazione di quest'equazione alle derivate parziali dipende da quella della seguente equazione alle derivate ordinarie:

$$\frac{dv}{du} + \psi(u, v) = 0,$$

e che, supposto

$$\chi(u, v) = \text{cost.}$$

l'integrale completo di quest'ultima, l'integrale generale della prima è

$$\varphi = F(\chi),$$

essendo F simbolo di funzione arbitraria. Ma, nel caso attuale, trattandosi unicamente di eguagliare la funzione φ ad una costante arbitraria, è chiaro che basterà prendere

$$\varphi = \chi(u, v);$$

epperò $\chi(u, v) = \text{cost.}$ sarà l'equazione dei sistemi richiesti.

Ecco adunque in che consiste la soluzione del problema:

Si assuma una funzione A di due variabili u e v, tale che non varii mutando rispettivamente u in $ue^{i\alpha}$ e v in $ve^{-i\alpha}$; indi si costituisca l'equazione

$$\frac{dv}{du} + A\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} = 0 \tag{15}$$

e si integri: sia

$$F(u, v, C) = 0$$

l'integrale di essa, completato da una costante arbitraria C. L'equazione

$$F(y + ix, y - ix, C) = 0$$

apparterrà ad uno dei sistemi cercati. Variando in tutti i modi possibili la forma della funzione arbitraria A, si otterranno tutti i sistemi dotati della proprietà in discorso.

Tale è la soluzione generale. Nondimeno è chiaro che, se i sistemi così ottenuti dovranno rappresentare curve a rami reali, bisognerà introdurre le opportune limitazioni nella scelta della funzione A, e dovranno rigettarsi alcune forme di essa che pure avrebbero soddisfatto alla condizione unica cui, dal punto di vista analitico, è essenzialmente vincolata la natura di tal funzione.

Per fare un esempio, mi limiterò al caso semplicissimo in cui A sia una costante assoluta, che terrò ancora rappresentata con A.

In questo caso l'equazione (15), ossia la

$$v^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} \frac{dv}{du} + A u^{\frac{\lambda}{\alpha}-1} = 0,$$

integrata dà

$$v^{\frac{\lambda}{\alpha}} + A u^{\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{cost.}$$

Perchè quest'equazione rappresenti sistemi di curve a rami reali fa d'uopo, per essere u e v immaginari coniugati, che A sia della forma $\frac{a+bi}{a-bi}$, epperò supposto $a + bi = \rho e^{i\theta}$, l'equazione precedente diverrà

$$e^{i\theta} u^{\frac{\lambda}{\alpha}} + e^{-i\theta} v^{\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{cost.}$$

Ma poichè, facendo ruotare il sistema per un angolo $-\frac{\theta\alpha}{\lambda}$, le u, v si cambiano rispettivamente in $u e^{-\frac{i\theta\alpha}{\lambda}}$, $v e^{\frac{i\theta\alpha}{\lambda}}$, è chiaro che dopo tale rotazione il sistema sarà rappresentato semplicemente dalla equazione:

$$u^{\frac{\lambda}{\alpha}} + v^{\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{cost.},$$

ossia dalla

$$(16)\qquad (y + ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}} + (y - ix)^{\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{cost.},$$

la quale potrà assumersi, senza scapito di generalità, in luogo della precedente, come corrispondente al caso particolarissimo in cui al posto della funzione arbitraria si assuma una costante assoluta.

Se in quest'ultima equazione si cambia λ in $-\lambda$, si avrà un altro sistema di curve

$$(16^{\text{bis}})\qquad (y + ix)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + (y - ix)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} = \text{cost.},$$

che sarà dotato di una proprietà analoga a quella del sistema (16), differendo fra loro questi due sistemi unicamente per il senso in cui si dovrà procedere dalla tangente in un punto qualunque del piano alla curva passante per esso prima della rotazione, alla tangente nel punto medesimo a quella curva che passa per esso dopo la rotazione, affine di misurare l'angolo λ.

È facile verificare, per mezzo delle note formole di trasformazione, che il sistema (16bis) non è altro che lo stesso sistema (16) trasformato per raggi vettori reciproci, assunta l'origine degli assi come centro d'inversione; ed in generale, riflettendo al carattere fondamentale di questa trasformazione, si concepisce immediatamente che, applicandola ad uno qualunque dei sistemi dotati della proprietà in discorso, si otterrà un nuovo sistema dotato della medesima proprietà del primo; ben inteso ponendo il centro di inversione nel centro di rotazione.

In tre casi l'equazione (16) riducesi a rappresentare linee del 2° ordine, quando cioè l'esponente $\frac{\lambda}{\alpha}$ è eguale a 2, oppure ad $\frac{1}{2}$, oppure a -1.

Ponendo $\frac{\lambda}{\alpha} = 2$ si ha $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ e l'equazione (16) si riduce alla

$$y^2 - x^2 = \text{cost.},$$

cioè rappresenta un sistema d'iperboli equilatere aventi in comune gli assi. Si ha così il teorema: *La serie delle linee che segano sotto un angolo costante λ il sistema di tutte le iperboli equilatere aventi in comune gli assi, è costituita da questo medesimo sistema ruotato intorno al suo centro per un angolo* $\frac{\lambda}{2}$. Nel quale teorema è compreso quello richiamato da principio, e pel quale è $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

Nella medesima ipotesi di $\frac{\lambda}{\alpha} = 2$, il sistema ($16^{bis}$) è costituito da lemniscate bernoulliane col punto doppio nel centro di rotazione, punto nel quale esse hanno anche comuni le tangenti. A queste curve adunque, che sono appunto, come è noto, le reciproche delle iperboli equilatere, compete la stessa proprietà or ora enunciata per queste ultime.

Se si fa $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1}{2}$, si ottengono le parabole omofocali:

$$x^2 + 2cy = c^2,$$

per le quali è $\alpha = 2\lambda$. Vale a dire: *La serie delle linee che segano sotto l'angolo costante λ il sistema di tutte le parabole aventi in comune l'asse ed il fuoco, è costituita da questo stesso sistema di parabole ruotato per un angolo 2λ intorno al fuoco comune.*

Si osservi che, nel caso particolare di $\lambda = \frac{\pi}{2}$, si ha $\alpha = \pi$, epperò, per avere

il sistema ortogonale al precedente, basta far ruotare quest'ultimo per un angolo $\alpha = \pi$ intorno all'origine degli assi, che è il fuoco comune a tutte le parabole componenti il sistema stesso, mentre il loro asse comune è diretto secondo l'asse delle y. Per tal modo l'asse positivo delle y dell'un sistema diviene negativo nell'altro; e i due sistemi, simmetrici intorno all'asse delle x, saranno rappresentati insieme dalla stessa equazione:

$$x^2 \pm 2cy = c^2.$$

Finalmente, facendo $\frac{\lambda}{\alpha} = -1$, ossia $\lambda = -\alpha$, si ottengono infinite circonferenze

$$x^2 + (y - c)^2 = c^2$$

aventi i centri sull'asse delle y e tangenti tutte nell'origine all'asse delle x. È facile infatti convincersi che in questo caso gli angoli α e λ sono eguali in grandezza assoluta, ma di senso contrario. L'equazione (16bis) porge in corrispondenza un sistema di rette parallele, com'era da prevedersi.

In generale, se con m si indica un numero razionale e si pone $\frac{\lambda}{\alpha} = m$, si ha manifestamente questo teorema: *La serie delle linee che segano sotto l'angolo costante λ il sistema di curve rappresentato dall'equazione:*

$$(y + ix)^m + (y - ix)^m = \text{cost.},$$

non è che questo sistema medesimo, ruotato intorno all'origine per un angolo $\frac{\lambda}{m}$.

Ho supposto, nella precedente applicazione, che λ non fosse nullo. Se si avesse avuto $\lambda = 0$, l'equazione (15) sarebbesi ridotta a

$$\frac{dv}{du} + A\frac{v}{u} = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{du} + \frac{A}{u} = 0,$$

epperò si sarebbe ottenuto:

$$uv = \text{cost.},$$

ovvero

$$x^2 + y^2 = \text{cost.},$$

equazione d'un sistema di circonferenze concentriche, pel quale è appunto $\lambda = 0$ qualunque sia α.

1 Novembre 1861.

II.

SULLA TEORIA DELLE SVILUPPOIDI E DELLE SVILUPPANTI.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo IV (1861), pp. 257-283.

Indichiamo con p, q, r le coordinate rettangole di una linea data qualsivoglia, con σ l'arco di essa, compreso fra un punto determinato e quello di coordinate p, q, r, e chiamiamo *sviluppoide* di questa linea un'altra linea tale che ciascuna sua tangente sia segata dalla prima sotto un angolo ω, *funzione qualsivoglia delle coordinate del punto di intersezione*. Quando quest'angolo sarà costante, la sviluppoide si potrà chiamare *ordinaria*. La linea di coordinate p, q, r si denominerà, come al solito, *trajettoria*. Indicheremo con x, y, z, s le coordinate e l'arco di una sviluppoide, ritenendo che il punto (x, y, z) sia propriamente quello in cui la sviluppoide è toccata dalla retta che incontra la trajettoria nel punto (p, q, r), ritenendo cioè che i punti (x, y, z) e (p, q, r) sieno punti *corrispondenti* delle due curve; inoltre diremo t la distanza di questi due punti e la chiameremo *raggio* della sviluppoide, corrispondente al punto (x, y, z). È evidente che le quantità p, q, r, σ, ω, x, y, z, s, t si possono riguardar tutte come funzioni di una medesima variabile indipendente, che indicheremo con u. Tutte queste denominazioni e segnature sono in gran parte conformi a quelle usate dall'illustre BRIOSCHI nelle sue ricerche *Intorno le sviluppoidi e le sviluppate* *), in cui però non vengono considerate che le sviluppoidi ordinarie.

Ciò posto, ed ammesso come evidente:

---

*) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. IV (1853), pp. 50-61.

1° che ad una medesima funzione ω di u corrispondono infinite sviluppoidi esistenti in una medesima superficie continua;

2° che il piano osculatore della sviluppoide in un punto qualunque di essa contiene la tangente alla trajettoria nel punto corrispondente;

procediamo a dimostrare il seguente

TEOREMA GENERALE. — *Qualunque sia la legge con cui varia da un punto all'altro l'angolo sotto cui le tangenti d'una sviluppoide sono segate dalla trajettoria, ciascuna sviluppoide è una linea geodetica della superficie luogo geometrico di tutte le sviluppoidi generate colla medesima legge.*

Di questo teorema non sembra noto che il caso particolarissimo di ω costante ed uguale a $\frac{1}{2}\pi$.

Se dal punto (p, q, r) della trajettoria si conducono le rette tangenti a tutte le sviluppoidi componenti la famiglia che si considera, è manifesto che queste rette sono le generatrici d'un cono retto, il cui asse è diretto secondo la tangente alla trajettoria, e che inviluppa la superficie luogo delle sviluppoidi; quest'ultima superficie ed il cono anzidetto hanno dunque nel punto (x, y, z) il medesimo piano tangente. Ciò posto, il piano osculatore della sviluppoide in questo punto è normale alla superficie conica, poichè contiene la tangente alla trajettoria, che ne è l'asse: dunque esso è normale anche alla superficie luogo delle sviluppoidi. Donde consegue che le sviluppoidi sono linee geodetiche di questa superficie.

Crediamo bene aggiungere una dimostrazione analitica di questa medesima proprietà.

Assumendo per semplicità come variabile indipendente la s, ed indicando con apici le derivazioni relative ad essa, si hanno le equazioni

$$(a) \qquad p = x + t x', \qquad q = y + t y', \qquad r = z + t z',$$

$$(b) \qquad p' x' + q' y' + r' z' = \sigma' \cos \omega,$$

da cui eliminando i coseni x', y', z' si ottiene la

$$(c) \quad (p-x)p' + (q-y)q' + (r-z)r' = \sigma' \cos\omega \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2 + (r-z)^2},$$

equazione che rappresenta evidentemente la superficie conica suindicata, quando vi si riguardino le x, y, z come coordinate correnti e le p, q, r, ecc. come costanti. Rappresentando quest'equazione con $M = 0$ se ne trae

$$\frac{\partial M}{\partial x} = p' - x'\sigma' \cos\omega, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = q' - y'\sigma' \cos\omega, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = r' - z'\sigma' \cos\omega.$$

Ora, derivando le equazioni (a) rispetto ad s si ha

$$p' = (1 + t')x' + t x'', \quad q' = (1 + t')y' + t y'', \quad r' = (1 + t')z' + t z'',$$

da cui, per la (b),

$$1 + t' = \sigma' \cos \omega ,$$

epperò

$$p' = x' \sigma' \cos \omega + t x'' , \quad q' = y' \sigma' \cos \omega + t y'' , \quad r' = z' \sigma' \cos \omega + t z'' ;$$

epperò anche

$$x'' : y'' : z'' = \frac{\partial M}{\partial x} : \frac{\partial M}{\partial y} : \frac{\partial M}{\partial z} .$$

Queste equazioni dimostrano il teorema, perchè le quantità x'', y'', z'' sono proporzionali ai coseni degli angoli che la normale principale della sviluppoide fa coi tre assi, e le derivate parziali $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial M}{\partial z}$ sono parimenti proporzionali ai coseni degli angoli che la normale alla superficie conica, e quindi alla superficie luogo delle sviluppoidi, fa cogli assi medesimi.

S'immagini la superficie luogo delle sviluppoidi ed uno dei coni retti che hanno il vertice in un punto della trajettoria e che sono circoscritti alla prima superficie. Queste due superficie si toccano lungo una linea, la quale ha le tangenti conjugate colle generatrici della superficie conica; ma ciascuna di queste generatrici tocca una sviluppoide in un punto di quella curva di contatto: dunque *le sviluppoidi e queste curve di contatto sono linee a tangenti conjugate.*

Potendosi considerare la superficie luogo geometrico delle sviluppoidi come l'inviluppo di tutti i coni rappresentati dalla (c), equazione nella quale le derivate possono ritenersi prese rispetto alla u, è chiaro che l'equazione di quella superficie risulterà dall'eliminazione di u fra la (c) e la derivata della (c) stessa rispetto alla sola u, variabile di cui sono funzioni le p, q, r, σ e, in generale, anche ω. Questa derivata, opportunamente combinata colla (c), fornisce quest'altra equazione, che si può sostituire in sua vece

$$\left[(p - x)\frac{d^2 p}{d\sigma^2} + (q - y)\frac{d^2 q}{d\sigma^2} + (r - z)\frac{d^2 r}{d\sigma^2} + \operatorname{sen}^2 \omega\right] \cos \omega$$
$$+ \frac{d\omega}{d\sigma} \operatorname{sen} \omega \left[(p - x)\frac{dp}{d\sigma} + (q - y)\frac{dq}{d\sigma} + (r - z)\frac{dr}{d\sigma}\right] = 0 .$$

Ora quest'ultima equazione rappresenta evidentemente un piano normale al piano osculatore della trajettoria; d'altronde essa appartiene alla linea di contatto del cono colla superficie luogo delle sviluppoidi, dunque questa linea di contatto è piana, epperò è una curva del second'ordine, poichè giace nella superficie del cono retto. Quando ω è costante, il piano della linea di contatto diventa parallelo alla tangente della trajettoria, ossia all'asse del cono, dunque in questo caso la linea di contatto è sempre un'iperbole.

Tutte quelle superficie che si possono considerare come inviluppi di coni retti

aventi i vertici in una linea qualsivoglia, gli assi diretti secondo le tangenti a questa linea, e i rispettivi angoli al vertice variabili da cono a cono secondo una legge qualsivoglia, contengono un sistema particolare di geodetiche (sviluppoidi della linea anzidetta), la cui ricerca non dipende che dalla integrazione di una equazione alle derivate ordinarie del prim'ordine fra due variabili, anzi, quando la linea è piana, da una semplice quadratura.

Si ha di ciò un esempio interessante nel caso delle superficie di second'ordine.

È noto *) che la superficie conica avente il vertice in un punto dello spazio ed involvente una superficie dell'ordine n, è in generale dell'ordine $n(n-1)$. Quando $n=2$, il cono involvente è adunque un cono di second'ordine (MONGE). Cerchiamo se questo cono possa, in certe particolari circostanze, ridursi ad un cono retto, cerchiamo cioè se una superficie di second'ordine possa essere il luogo geometrico delle sviluppoidi d'una linea tracciata nello spazio.

Sia

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

l'equazione della superficie di second'ordine, e sieno p, q, r le coordinate della trajettoria. Il cono avente il vertice nel punto (p, q, r) ed involvente questa superficie è rappresentato, come facilmente si può verificare, dall'equazione

$$\begin{gathered} a(h^2 - ap^2)(x-p)^2 + b(h^2 - bq^2)(y-q)^2 + c(h^2 - cr^2)(z-r)^2 \\ -2bcqr(y-q)(z-r) - 2carp(z-r)(x-p) - 2abpq(x-p)(y-q) = 0, \end{gathered}$$

in cui $h^2 = ap^2 + bq^2 + cr^2 - 1$; d'altra parte, il cono retto che ha il vertice nel punto (p, q, r) e l'asse diretto secondo la tangente alla trajettoria è rappresentato, come pocanzi si è veduto, dalla

$$\begin{gathered} (\sigma'^2 \cos^2\omega - p'^2)(x-p)^2 + (\sigma'^2 \cos^2\omega - q'^2)(y-q)^2 + (\sigma'^2 \cos^2\omega - r'^2)(z-r)^2 \\ -2q'r'(y-q)(z-r) - 2r'p'(z-r)(x-p) - 2p'q'(x-p)(y-q) = 0. \end{gathered}$$

Dunque, affinchè possa esistere una trajettoria, le equazioni dei due coni debbono potersi identificare fra loro, ossia, indicando con k una indeterminata, debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} a(h^2 - ap^2) &= k(\sigma'^2 \cos^2\omega - p'^2), & bcqr &= kq'r', \\ b(h^2 - bq^2) &= k(\sigma'^2 \cos^2\omega - q'^2), & carp &= kr'p', \\ c(h^2 - cr^2) &= k(\sigma'^2 \cos^2\omega - r'^2), & abpq &= kp'q'. \end{aligned}$$

---

*) SALMON, *A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions*, Dublin, 1862, pag. 190. Citiamo con piacere questo libro, or ora pubblicato dal dotto e benemerito geometra irlandese, per chiamare sovr'esso l'attenzione degli studiosi.

Se nessuna delle quantità p, q, r (e quindi anche delle p', q', r' rispettivamente) è nulla, le equazioni del secondo gruppo, confrontate fra loro, dànno

$$a^2 p^2 = k p'^2, \qquad b^2 q^2 = k q'^2, \qquad c^2 r^2 = k r'^2,$$

epperò quelle del primo gruppo riduconsi alle seguenti:

$$k \sigma'^2 \cos^2 \omega = a h^2 = b h^2 = c h^2 ,$$

le quali richiedono che sia $a = b = c$, cioè che la superficie sia sferica; le precedenti tre equazioni diventano in questo caso

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} ,$$

equazioni di rette passanti pel centro della sfera.

Se si prescinde da questo caso, per sè medesimo evidente, bisogna ammettere che sia

$$p = p' = 0 \quad \text{oppure} \quad q = q' = 0 \quad \text{oppure} \quad r = r' = 0 ,$$

cioè che la trajettoria sia piana ed esistente in uno dei tre piani principali. Si consideri adunque quella trajettoria che *può* esistere nel piano xy. In questo caso le precedenti equazioni si riducono alle seguenti:

$$a(h^2 - a p^2) = k(\sigma'^2 \cos^2 \omega - p'^2),$$

$$b(h^2 - b q^2) = k(\sigma'^2 \cos^2 \omega - q'^2), \quad a b p q = k p' q', \quad (h^2 = a p^2 + b q^2 - 1).$$

$$c h^2 = k \sigma'^2 \cos^2 \omega ,$$

Si cominci a determinare ω. Sommando le due prime equazioni e dal risultato sottraendo la terza si ottiene

$$(a + b - c)\, h^2 - (a^2 p^2 + b^2 q^2) = - k \sigma'^2 \operatorname{sen}^2 \omega ,$$

e dividendo quest'ultima equazione per la terza si ha

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2 - h^2(a + b - c)}}{h \sqrt{c}} .$$

La precedente tien luogo di una delle prime equazioni ed alle rimanenti si possono surrogar quelle che si ottengono eliminando ω, cioè le

$$a^2 p^2 - (a - c) h^2 = k p'^2, \quad b^2 q^2 - (b - c) h^2 = k q'^2, \quad a b p q = k p' q'.$$

Sottraendo dal prodotto delle due prime il quadrato della terza si ottiene

$$a c (b - c) p^2 + b c (a - c) q^2 + (a - c)(b - c) = 0, \tag{1}$$

equazione che si può di nuovo sostituire ad una delle precedenti, per es. alla prima. Finalmente eliminando k fra le altre due si ha

$$[b c q^2 - (b - c)(a p^2 - 1)] p' = a b p q q'.$$

È evidente che *se* esiste una trajettoria, la sua equazione finita non può esser altro che la (1), la quale non contiene alcuna delle quantità k, ω, p', q'; ma d'altra parte dev'essere soddisfatta anche la precedente equazione, che contiene q^2 e $q q'$, dunque la relazione che dovrà risultare identica affinchè esista una trajettoria sarà quella che si otterrà sostituendo in quest'ultima equazione i valori di q^2 e di $q q'$ cavati dalla (1) e dalla sua derivata. Ora, facendo tale sostituzione si trova per risultato una identità: dunque la (1) è senz'altro l'equazione della trajettoria e fra i parametri a, b, c della superficie data non occorre ammettere alcuna relazione necessaria. È poi evidente che supponendo $p = p' = 0$, ovvero $q = q' = 0$, si otterrebbero altre due trajettorie analoghe alla (1), situate ne' due piani principali yz e zx.

Ponendo l'equazione della superficie sotto l'ordinaria forma

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

facilmente si trova che le equazioni delle tre coniche analoghe alla (1) sono:

nel piano yz, $\quad \dfrac{q^2}{B^2 - A^2} + \dfrac{r^2}{C^2 - A^2} = 1, \quad \left(\cos\omega_1 = \dfrac{\sqrt{B^2 + C^2 - A^2 - q^2 - r^2}}{\sqrt{B^2 + C^2 - 2A^2 - q^2 - r^2}}\right),$

» $\quad zx$, $\quad \dfrac{r^2}{C^2 - B^2} + \dfrac{p^2}{A^2 - B^2} = 1, \quad \left(\cos\omega_2 = \dfrac{\sqrt{C^2 + A^2 - B^2 - r^2 - p^2}}{\sqrt{C^2 + A^2 - 2B^2 - r^2 - p^2}}\right),$

» $\quad xy$, $\quad \dfrac{p^2}{A^2 - C^2} + \dfrac{q^2}{B^2 - C^2} = 1, \quad \left(\cos\omega_3 = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2 - p^2 - q^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2C^2 - p^2 - q^2}}\right),$

ossia che le tre curve cercate son quelle che si sogliono denominare *focali*.

Dal fin qui detto si ricavano le seguenti proprietà:

Se F è una qualunque delle tre coniche focali d'una superficie di second'ordine S:

1° *Tutte le superficie coniche* (reali od immaginarie) *aventi il vertice in un punto di F e circoscritte ad S sono coni retti.*

2° *Gli assi di questi coni sono tangenti alla focale F* *).

3° *Le linee tracciate nella superficie S in modo che le loro tangenti incontrino costantemente F sono geodetiche di quella superficie.*

*) Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, Lipsia, 1861, pp. 298-301.

4° *Se una linea esistente nella superficie S ha dovunque le tangenti conjugate con quelle delle linee di contatto fra S ed i coni retti aventi il vertice in F, quella linea è una geodetica di S.*

Ad una conica

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$$

corrispondono infinite superficie di second'ordine

$$\frac{x^2}{a^2\pm c^2}+\frac{y^2}{b^2\pm c^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1,$$

di cui essa è curva focale nel piano xy, e il valore corrispondente di $\cos\omega$ è

$$\cos\omega=\frac{\sqrt{a^2+b^2\pm c^2-p^2-q^2}}{\sqrt{a^2+b^2-p^2-q^2}}.$$

Se si ammette che a^2 e b^2 sieno positivi, cioè che la conica sia un'ellisse, bisogna prendere c^2 col segno negativo per avere sviluppoidi reali. Adunque in un ellissoide non possono esistere sviluppoidi reali che di curve focali iperboliche.

Il valore di $\cos\omega$ contiene le variabili p e q nel binomio p^2+q^2. Ne risulta che affinchè l'angolo ω sia costante bisogna che la trajettoria sia una circonferenza. In questo caso, fatto $a=b=d$, si ha

$$\cos\omega=\frac{\sqrt{d^2-c^2}}{d},$$

donde

$$c=d\,\mathrm{sen}\,\omega;$$

quindi:

Tutte le linee reali le cui tangenti sono incontrate sotto un angolo costante ω dalla circonferenza

$$p^2+q^2=d^2,$$

esistono nell'iperboloide di rotazione

$$\frac{x^2+y^2}{(d\cos\omega)^2}-\frac{z^2}{(d\,\mathrm{sen}\,\omega)^2}=1$$

e sono geodetiche di esso.

La ricerca effettiva delle sviluppoidi di una linea data qualsivoglia dipende, come abbiam detto, dall'integrazione d'un'equazione alle derivate ordinarie del prim'ordine fra due variabili. Mostreremo adesso come si possa in ogni caso formare quest'equazione.

Sieno

$$\frac{x-p}{\xi}=\frac{y-q}{\eta}=\frac{z-r}{\vartheta}=t$$

le equazioni d'una retta condotta nel punto (p, q, r) della trajettoria; x, y, z le sue coordinate correnti; ξ, η, ζ i coseni degli angoli ch'essa forma cogli assi, per cui

$$\text{(I)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

e t la distanza variabile dal punto fisso (p, q, r) al punto variabile (x, y, z). Affinchè questa retta tocchi *una* sviluppoide è necessario e sufficiente che formi un angolo uguale a $\omega(u)$ colla tangente alla linea data nel punto (p, q, r), epperò che si abbia

$$\text{(II)} \qquad \xi p' + \eta q' + \zeta r' = \sigma' \cos \omega(u).$$

Ora, affinchè al variare del punto (p, q, r) le corrispondenti rette t sieno tutte tangenti ad una *medesima* sviluppoide, è necessario che il sistema di quelle rette, oltre soggiacere alla condizione (II), sia suscettibile di avere un inviluppo. Per istabilire questa seconda condizione si derivino rispetto ad u le tre equazioni:

$$x = p + \xi t, \qquad y = q + \eta t, \qquad z = r + \zeta t,$$

riguardando come costanti le x, y, z; si avranno in tal modo le

$$p' + \xi' t + \xi t' = 0, \qquad q' + \eta' t + \eta t' = 0, \qquad r' + \zeta' t + \zeta t' = 0,$$

da cui eliminando le indeterminate t e t' si ottiene:

$$\text{(III)} \qquad \xi'(\eta r' - \zeta q') + \eta'(\zeta p' - \xi r') + \zeta'(\xi q' - \eta p') = 0:$$

questa è la condizione cercata. Supposte conosciute le p, q, r, ω in funzione di u, le tre equazioni (I), (II), (III) serviranno in ogni caso a trovare l'equazione alle derivate ordinarie fra due sole variabili, la cui integrazione fornirà la soluzione del problema. Ciò potrà farsi in generale in molti modi, e converrà approfittare di questa larghezza per iscegliere nel modo più opportuno le quantità che conviene eliminare e quella che conviene assumere come variabile indipendente. Per l'applicazione del processo basta che sia possibile, come sarà sempre, eliminare fra le cinque equazioni (I), (II), (III) e le derivate delle due prime, quattro delle quantità (ξ, ξ'), (η, η'), (ζ, ζ') prese a due a due.

Trovati che siansi, in un modo o nell'altro, i valori di ξ, η, ζ, si sostituiranno nelle equazioni

$$\frac{x-p}{\xi} = \frac{y-q}{\eta} = \frac{z-r}{\zeta},$$

che rappresenteranno allora un sistema di rette dotate di inviluppo, e le cui due derivate prese rispetto alla sola u, considerando le x, y, z come costanti, si ridurranno quindi ad una sola equazione: quest'equazione e le due precedenti serviranno a deter-

minare le x, y, z in funzione di u. Eliminando la u si avranno le due equazioni ordinarie delle sviluppoidi, e di nuovo eliminando fra queste due ultime equazioni la costante introdotta dall'integrazione, si avrà l'equazione della superficie luogo geometrico delle sviluppoidi medesime.

Per mostrare con un esempio il modo di applicare questo processo, tratteremo il caso generale delle curve piane e dimostreremo il seguente teorema già enunciato precedentemente:

TEOREMA. — *La ricerca delle sviluppoidi a doppia curvatura di una curva piana qualsivoglia dipende da una sola quadratura.*

Supponiamo che la curva piana data sia nel piano xy, laonde si avrà per essa $r = 0$. Assumiamo per equazioni della retta t le seguenti:

$$x = p + \alpha z, \qquad y = q + \beta z; \tag{1}$$

per cui

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}.$$

La (II) diverrà, in questo caso,

$$\frac{\alpha p' + \beta q'}{\sigma' \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}} = \cos \omega . \tag{2}$$

Inoltre, derivando le (1) rispetto alla sola u contenuta nelle p, q, α, β ed eliminando z si ha

$$q' \alpha' - p' \beta' = 0,$$

ossia

$$q' - p' \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \tag{3}$$

giacchè nulla impedisce di prendere α o qualsivoglia altra quantità per variabile indipendente e di supporne funzione anche la u. Quest'ultima equazione è quella che nel caso attuale tien luogo della (III).

Se si sostituisse in essa il valore di u formato con α e β, cavato dalla (2), si otterrebbe un'equazione fra le sole α, β, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ che darebbe β in funzione di α. Ma senza fare tale sostituzione, che condurrebbe ad un risultato assai complicato, è più opportuno ricorrere alle seguenti considerazioni.

Se la u fosse costante, sarebbero costanti anche le quantità $p'(u)$, $q'(u)$ che sono funzioni di essa soltanto, epperò integrando la (3) si avrebbe

$$\alpha q' - \beta p' = \text{cost.};$$

ma siccome u è variabile, e propriamente è quella funzione delle α, β che soddisfa

all'equazione (2), così l'arbitraria introdotta da questa integrazione deve riguardarsi come una funzione di u vincolata dalla condizione di soddisfare alla derivata dell'equazione integrale, derivata presa rispetto alla sola u contenuta nelle p, q e nella funzione incognita. Rappresentando adunque tale funzione incognita con $\varphi(u)$ si avranno le due equazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha q' - \beta p' = \varphi(u), \\ \alpha q'' - \beta p'' = \varphi'(u). \end{cases}$$

Le quantità u, $\varphi(u)$ debbono per tal guisa soddisfare alle due equazioni precedenti ed alla (2), per cui eliminando α e β fra queste tre equazioni, se ne avrà una fra le u, $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ che servirà a determinare la forma della funzione $\varphi(u)$. Tale eliminazione si opera agevolmente cavando dalle (4) i valori di α e β, che sono

$$(p'q'' - p''q')\alpha = p'\varphi' - p''\varphi,$$

$$(p'q'' - p''q')\beta = q'\varphi' - q''\varphi,$$

da cui si ottiene:

$$(p'q''-p''q')^2(1+\alpha^2+\beta^2) = \sigma'^2\varphi'^2 - 2\sigma'\sigma''\varphi\varphi' + (p''^2+q''^2)\varphi^2 + (p'q''-p''q')^2,$$

$$(p'q''-p''q')(\alpha p' + \beta q') = \sigma'^2\varphi' - \sigma'\sigma''\varphi.$$

Sostituendo nella (2) i valori di

$$\alpha p' + \beta q', \qquad 1 + \alpha^2 + \beta^2$$

trovati or ora, si ottiene

$$\sigma'^2 \operatorname{sen}^2\omega.\varphi'^2 - 2\varphi\sigma'\sigma'' \operatorname{sen}^2\omega.\varphi' - \{\cos^2\omega[(p''^2+q''^2)\varphi^2 + (p'q''-p''q')^2] - \sigma''^2\varphi^2\} = 0,$$

la quale equazione, risoluta rispetto a φ', dopo alcune riduzioni dà

$$\sigma'\varphi' - \sigma''\varphi = \cot\omega \sqrt{\sigma'^2+\varphi^2}\sqrt{p''^2+q''^2-\sigma''^2}.$$

Se al primo membro di quest'equazione, moltiplicata per σ', si aggiunge e si sottrae la quantità $\varphi^2\varphi'$, indi si divide per $\sqrt{\sigma'^2+\varphi^2}$, facilmente si scorge che essa può mettersi sotto questa forma:

$$(5) \qquad (\sigma'^2+\varphi^2)\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\sigma'^2+\varphi^2}}\right)' = \sigma' \cot\omega \sqrt{p''^2+q''^2-\sigma''^2}.$$

Si ponga

$$\frac{\varphi}{\sqrt{\sigma'^2+\varphi^2}} = \psi,$$

da cui

$$(6) \qquad \varphi = \frac{\sigma'\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}$$

e

$$\sigma'^2 + \varphi^2 = \frac{\sigma'^2}{1 - \psi^2}.$$

Sostituendo questi valori nella (5) essa diventa

$$\frac{\psi'}{1 - \psi^2} = \frac{\cot\omega \sqrt{p''^2 + q''^2 - \sigma''^2}}{\sigma'},$$

equazione in cui le variabili sono separate e che quindi si integra per quadrature. Designando con θ il complesso degli angoli di contingenza della linea data, l'equazione precedente si riduce alla forma semplicissima

$$\frac{\psi'}{1 - \psi^2} = \theta' \cot\omega$$

ed integrata dà

$$\log \frac{1 + \psi}{1 - \psi} = 2 \int \theta' \cot\omega \, du + 2 \log C,$$

C còstante arbitraria. Se ne cava

$$\psi = \frac{C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} - 1}{C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} + 1},$$

e sostituendo nella (6),

$$\varphi = \frac{\sigma' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} - 1)}{2 C e^{\int \theta' \cot\omega du}}. \tag{7}$$

Da questo risultato viene ad essere dimostrato il teorema enunciato alla pagina 16, poichè le operazioni che rimangono a fare per determinare gli elementi della sviluppoide non implicano più alcuna integrazione.

Cominciamo a formare i valori di α e di β.

La (2) e la prima delle (4) dànno facilmente

$$\sigma'^2 \alpha = q' \varphi + p' \cot\omega \sqrt{\sigma'^2 + \varphi^2},$$

$$\sigma'^2 \beta = - p' \varphi + q' \cot\omega \sqrt{\sigma'^2 + \varphi^2}.$$

Ora, dalla (7) si ha tosto

$$\sqrt{\sigma'^2 + \varphi^2} = \frac{\sigma' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} + 1)}{2 C e^{\int \theta' \cot\omega du}};$$

quindi, sostituendo,

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{p' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} + 1) \cos\omega + q' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} - 1) \operatorname{sen}\omega}{2\sigma' \operatorname{sen}\omega . \, C e^{\int \theta' \cot\omega du}}, \\ \beta &= \frac{q' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} + 1) \cos\omega - p' (C^2 e^{2\int \theta' \cot\omega du} - 1) \operatorname{sen}\omega}{2\sigma' \operatorname{sen}\omega . \, C e^{\int \theta' \cot\omega du}}. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Tali sono i valori da sostituirsi nelle (1) affinchè queste ultime equazioni rappresentino la retta tangente condòtta dal punto (p, q, r) ad una delle sviluppoidi. Per avere le x, y, z del punto di contatto, ossia le coordinate del punto di quella sviluppoide, corrispondente al punto (p, q, r) della trajettoria, bisogna trovare una terza equazione fra le x, y, z, e questa terza equazione si avrà, conforme al processo indicato, derivando rispetto ad u una qualunque delle equazioni, per es. la prima. Eseguendo tale derivazione si ottiene

$$z = -\frac{p'}{\alpha'}.$$

Ora, dal valore di α [1ª equazione (8)] si cava:

$$\alpha' = \frac{1}{2C\sigma'^2 \operatorname{sen}^2\omega\, e^{\int\theta'\cot\omega du}} \left\{ \begin{array}{l} (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)\left[(\sigma' p''-\sigma'' p'+q'\sigma'\theta')\operatorname{sen}\omega\cos\omega-p'\sigma'\omega'\right] \\ +(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)\left[(\sigma' q''-\sigma'' q'-p'\sigma'\theta')\operatorname{sen}^2\omega+p'\sigma'\theta'\right] \end{array} \right\}.$$

Questo valore si può semplificare moltiplicando il numeratore ed il denominatore del secondo membro per σ', indi osservando essere

$$\sigma'^2 p'' - \sigma'\sigma'' p' = -q'(p'q'' - p''q'), \qquad \sigma'^2 q'' - \sigma'\sigma'' q' = p'(p'q'' - p''q'),$$

ed inoltre

$$\theta' = \frac{\sqrt{p''^2 + q''^2 - \sigma''^2}}{\sigma'} = \frac{p'q'' - p''q'}{\sigma'^2},$$

per cui

$$\sigma'^2 p'' - \sigma'\sigma'' p' = -q'\sigma'^2\theta',$$

$$\sigma'^2 q'' - \sigma'\sigma'' q' = p'\sigma'^2\theta'.$$

Per queste ultime identità l'equazione precedente assume la forma più semplice

$$-\frac{\alpha'}{p'} = \frac{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du} + 1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du} - 1)\theta'}{2C\sigma' \operatorname{sen}^2\omega\, e^{\int\theta'\cot\omega du}},$$

epperò si ha

$$z = \frac{2C\sigma' \operatorname{sen}\omega\, e^{\int\theta'\cot\omega du}}{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du} + 1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du} - 1)\theta'}.$$

Finalmente, sostituendo nelle (1) questo valore e quelli delle α, β dati dalle (8), si hanno i valori delle altre due coordinate x ed y; riunendoli insieme tutti e tre si ottengono così le formole seguenti, alle quali aggiungiamo quella che dà il valore del raggio t della sviluppoide e che si ottiene formando col mezzo delle tre prime la espressione $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2}$:

$$(9)\quad\begin{cases} x = p + \operatorname{sen}\omega\,\dfrac{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)p'\cos\omega + (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)q'\operatorname{sen}\omega}{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)\theta'}\,, \\[2ex] y = q + \operatorname{sen}\omega\,\dfrac{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)q'\cos\omega - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)p'\operatorname{sen}\omega}{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)\theta'}\,, \\[2ex] z = \dfrac{2C\sigma'\operatorname{sen}^2\omega\, e^{\int\theta'\cot\omega du}}{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)\theta'}\,, \end{cases}$$

$$(10)\qquad t = \pm\operatorname{sen}\omega\,\frac{\sigma'(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)}{(C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}+1)\omega' - (C^2 e^{2\int\theta'\cot\omega du}-1)\theta'}\,.$$

Se si volessero le coordinate x ed y di quella particolare sviluppoide che giace nel piano della trajettoria, basterebbe osservare che per ogni punto di essa si ha

$$z = 0\,,$$

per cui, in forza della terza equazione (9), il valore della costante arbitraria C corrispondente a questa sviluppoide è nullo. Si ha per ciò

$$x = p + \operatorname{sen}\omega\,\frac{p'\cos\omega - q'\operatorname{sen}\omega}{\omega' + \theta'}\,,\quad y = q + \operatorname{sen}\omega\,\frac{q'\cos\omega + p'\operatorname{sen}\omega}{\omega' + \theta'}\,,$$

equazioni dalle quali si possono dedurre assai facilmente alcune relazioni note.

Se invece si volessero avere le sviluppate ordinarie della trajettoria, basterebbe far $\omega = \frac{1}{2}\pi$ nelle formole (9) e si avrebbe:

$$x = p - \frac{q'}{\theta'}\,,\quad y = q + \frac{p'}{\theta'}\,,\quad z = -\frac{2C}{C^2-1}\,\frac{\sigma'}{\theta'}\,,\quad t = \pm\frac{C^2+1}{C^2-1}\,\frac{\sigma'}{\theta'}\,,$$

ossia, se si rammenta che indicando con d il raggio di curvatura della trajettoria si ha $\theta' d = \sigma'$,

$$x = p - d\frac{dq}{d\sigma}\,,\quad y = q + d\frac{dp}{d\sigma}\,,\quad z = -\frac{2C}{C^2-1}\,d\,,\quad t = \pm\frac{C^2+1}{C^2-1}\,d\,,$$

espressioni che concordano perfettamente con quelle date da Fuss e citate da Brioschi (*Intorno le sviluppoidi*, ecc.), sol che si ponga $\dfrac{2C}{C^2-1} = \pm\cot h$, h nuova costante, e quindi $\dfrac{C^2+1}{C^2-1} = \pm\dfrac{1}{\operatorname{sen} h}$.

Si supponga che ω sia costante e che la curva data sia l'ellisse

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1\,;$$

ponendo

$$p = a \cos u, \qquad q = b \,\mathrm{sen}\, u,$$

si ha in questo caso:

$$\omega' = 0,$$

$$p' = -a \,\mathrm{sen}\, u, \qquad p'' = -a \cos u, \qquad \sigma' = \sqrt{a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u},$$

$$q' = b \cos u, \qquad q'' = -b \,\mathrm{sen}\, u, \qquad \theta' = \frac{ab}{a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u};$$

epperò

$$\int \theta' du = \int \frac{ab\, du}{a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u} = \int \frac{\left(\frac{a \,\mathrm{tg}\, u}{b}\right)' du}{1 + \left(\frac{a \,\mathrm{tg}\, u}{b}\right)^2} = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{a \,\mathrm{tg}\, u}{b}\right),$$

per cui, posto per brevità

$$\frac{a \,\mathrm{sen}\, u}{b \cos u} = \frac{\mathrm{sen}\, \nu}{\cos \nu}, \tag{11}$$

epperò

$$\frac{a \,\mathrm{sen}\, u}{\mathrm{sen}\, \nu} = \frac{b \cos u}{\cos \nu} = \sqrt{a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u},$$

si ha

$$\int \theta' du = \nu.$$

Sostituendo questi valori nelle (9) ed osservando le (11) si ottengono le seguenti formole:

$$x = a \cos u - \mathrm{sen}\, \omega \frac{C^2 e^{2\nu \cot \omega} \,\mathrm{sen}\, (\omega - \nu) - \mathrm{sen}\, (\omega + \nu)}{ab\, (C^2 e^{2\nu \cot \omega} - 1)} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = b \,\mathrm{sen}\, u - \mathrm{sen}\, \omega \frac{C^2 e^{2\nu \cot \omega} \cos (\omega - \nu) + \cos (\omega + \nu)}{ab\, (C^2 e^{2\nu \cot \omega} - 1)} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}},$$

$$z = -\frac{2\, C \,\mathrm{sen}^2 \omega\, e^{\nu \cot \omega}}{ab\, (C^2 e^{2\nu \cot \omega} - 1)} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}},$$

alle quali si può dare una forma un pò più elegante ponendo $C = \cot \lambda$, λ nuova costante, e scrivendole nel modo che segue:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a \cos u - \mathrm{sen}\, \omega \frac{\cos^2 \lambda .\, \mathrm{sen}\, (\omega - \nu) .\, e^{\nu \cot \omega} - \mathrm{sen}^2 \lambda .\, \mathrm{sen}\, (\omega + \nu) .\, e^{-\nu \cot \omega}}{ab\, (\cos^2 \lambda .\, e^{\nu \cot \omega} - \mathrm{sen}^2 \lambda .\, e^{-\nu \cot \omega})} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}, \\ y &= b \,\mathrm{sen}\, u - \mathrm{sen}\, \omega \frac{\cos^2 \lambda .\, \cos (\omega - \nu) .\, e^{\nu \cot \omega} + \mathrm{sen}^2 \lambda .\, \cos (\omega + \nu) .\, e^{-\nu \cot \omega}}{ab\, (\cos^2 \lambda .\, e^{\nu \cot \omega} - \mathrm{sen}^2 \lambda .\, e^{-\nu \cot \omega})} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= -\frac{\mathrm{sen}\, 2\lambda .\, \mathrm{sen}^2 \omega}{ab\, (\cos^2 \lambda .\, e^{\nu \cot \omega} - \mathrm{sen}^2 \lambda .\, e^{-\nu \cot \omega})} (a^2 \,\mathrm{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Si trova anche

$$(13)\qquad t = \pm \operatorname{sen}\omega \frac{\cos^2\lambda . e^{\nu\cot\omega} + \operatorname{sen}^2\lambda . e^{-\nu\cot\omega}}{ab(\cos^2\lambda . e^{\nu\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda . e^{-\nu\cot\omega})}(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}.$$

Per avere, a cagion d'esempio, la sviluppata piana dell'ellisse si farà $\lambda = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$, ed i valori risultanti di x ed y, viste le (11), si potranno scrivere così:

$$x = a\cos u - \frac{\cos u}{a}(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u),$$

$$y = b\operatorname{sen} u - \frac{\operatorname{sen} u}{b}(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u),$$

ossia

$$ax = (a^2 - b^2)\cos^3 u, \qquad by = -(a^2 - b^2)\operatorname{sen}^3 u,$$

da cui, eliminando u,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

risultato notissimo. Nelle stesse ipotesi la formola (13) diventa

$$t = \frac{(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

ossia

$$t = \left(\frac{p^2}{a^4} + \frac{q^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} a^2 b^2,$$

epperò, denominando h la distanza dal centro alla tangente nel punto (p, q),

$$t = \frac{a^2 b^2}{h^3};$$

ma indicando con δ il semidiametro parallelo alla tangente, si ha, come è noto, $\delta h = ab$, dunque

$$t = \frac{\delta^2}{h},$$

nota formola che dà il raggio di curvatura dell'ellisse in un suo punto qualunque.

Nel caso della circonferenza,

$$p^2 + q^2 = d^2,$$

si ha $a = b = d$, $\nu = u$ e dalle (12), (13) si cavano le formole seguenti:

$$x = d\left[\cos u - \operatorname{sen}\omega \frac{\cos^2\lambda . \operatorname{sen}(\omega - u). e^{u\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda . \operatorname{sen}(\omega + u). e^{-u\cot\omega}}{\cos^2\lambda . e^{u\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda . e^{-u\cot\omega}}\right],$$

$$y = d\left[\operatorname{sen} u - \operatorname{sen}\omega \frac{\cos^2\lambda.\cos(\omega - u).e^{u\cot\omega} + \operatorname{sen}^2\lambda.\cos(\omega + u).e^{-u\cot\omega}}{\cos^2\lambda.e^{u\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda.e^{-u\cot\omega}}\right],$$

$$z = -d\frac{\operatorname{sen} 2\lambda.\operatorname{sen}^2\omega}{\cos^2\lambda.e^{u\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda.e^{-u\cot\omega}},$$

$$t = \pm d \operatorname{sen}\omega \frac{\cos^2\lambda.e^{u\cot\omega} + \operatorname{sen}^2\lambda.e^{-u\cot\omega}}{\cos^2\lambda.e^{u\cot\omega} - \operatorname{sen}^2\lambda.e^{-u\cot\omega}}.$$

Tali sono le formole che forniscono gli elementi delle sviluppoidi ordinarie di una circonferenza di raggio uguale a d. Come sopra si è veduto, queste sviluppoidi sono linee geodetiche dell'iperboloide di rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{(d\cos\omega)^2} - \frac{z^2}{(d\operatorname{sen}\omega)^2} = 1,$$

il quale è il loro luogo geometrico.

Se si volessero cercare quelle sviluppoidi dell'ellisse

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

che giacciono nell'iperboloide a tre assi

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

(e che sono geodetiche di esso), bisognerebbe prendere per ω la funzione delle p, q data, come si è veduto, dalla formola

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - p^2 - q^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 - p^2 - q^2}}.$$

Si avrebbe in tal caso, conservate le segnature precedenti,

$$\cot\omega = \frac{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u - c^2}}{c},$$

epperò

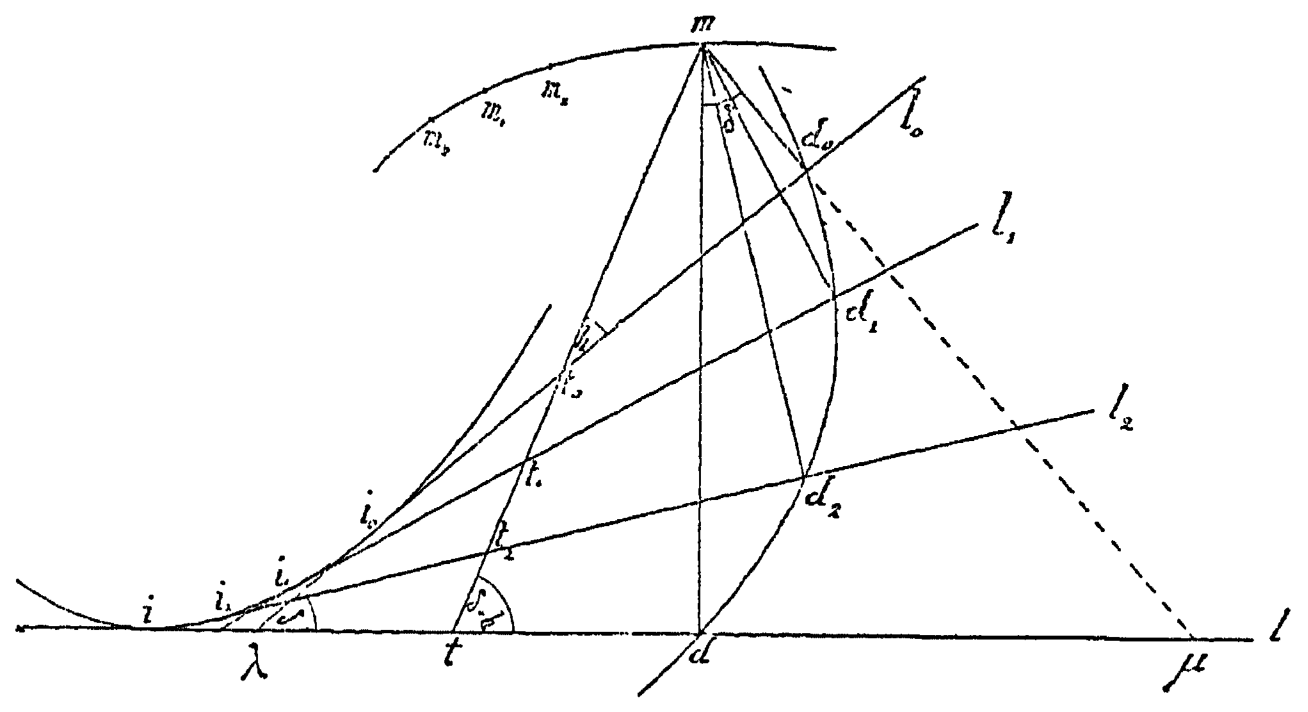
$$\theta'\cot\omega = \frac{a\,b\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u - c^2}}{c\,(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u)}.$$

Questa funzione non è di quelle delle quali si possa conseguire l'integrale sotto forma finita.

Esporremo ora alcune considerazioni geometriche che conducono in un modo semplicissimo alle note formole relative alle sviluppate ordinarie e ad altre interessanti conseguenze *).

Si concepisca che il piano normale alla linea data, partendo da quella posizione iniziale nella quale incontra la linea data nel punto m_0 e tocca la superficie polare lungo la generatrice l_0, ruoti senza strisciare su questa superficie, toccandola successivamente lungo le generatrici $l_1, l_2, \ldots l$ corrispondenti ai punti $m_1, m_2, \ldots m$ della linea (m punto generico di questa). È noto che, durante questa rotazione, quel punto del piano, m_0, che apparteneva alla linea nel primo istante del moto, non esce mai dalla linea stessa e si sovrappone successivamente ai punti $m_1, m_2, \ldots m$ di essa.

Se si suppone che le generatrici della superficie polare lascino traccia di sè nel piano mobile, esisterà in questo piano, considerato alla fine della rotazione,



cioè quando passa pel punto m, una serie di rette segantisi successivamente a due a due in modo da dar luogo ad un inviluppo: siano $i_0, i_1, i_2, \ldots i$, i punti di contatto di questo inviluppo colle rette $l_0, l_1, l_2, \ldots l$. La curva $i_0, i_1, i_2, \ldots i$ è manifestamente quella secondo cui si svolge nel piano mobile la linea luogo dei centri delle sfere osculatrici. Si osservi anche che, essendo le rette $l_0, l_1, l_2, \ldots l$ perpendicolari ai piani osculatori della linea data rispettivamente nei punti $m_0, m_1, m_2, \ldots m$, le loro successive deviazioni misurano la cosidetta *torsione* della linea stessa, per cui l'angolo formato dalle rette l ed l_0 (che si incontrano nel punto λ) sarà il complesso degli an-

*) Dopo avere scritto queste pagine mi è venuta alle mani una Memoria del valentissimo CHELINI [*Sulla curvatura delle linee e delle superficie* (Raccolta scientifica compilata dal Dr. PALOMBA, anno I, Roma, 1845)], in cui si fa uso di analoghe considerazioni e si dimostrano con somma semplicità molti importanti teoremi. Il CHELINI merita la riconoscenza di tutti gli studiosi per avere più volte applicato l'ingegno a render loro men difficile l'accesso di parecchie moderne teorie.

goli di torsione della linea per la porzione $m_0 m$ di essa. Si denomini δ tale complesso *).

Ora supponiamo che nella superficie polare sia tracciata una delle sviluppate ordinarie della linea data. È noto (ed evidente, per la sua definizione) ch'essa si svolge nel piano mobile secondo una retta che passa pel punto m e che incontra le generatrici $l_0, l_1, l_2, \ldots l$ nei punti $t_0, t_1, t_2, \ldots t$: la porzione mt, che diremo t, sarà il raggio della sviluppata, corrispondente al punto m della linea data. È evidente che per individuare la sviluppata basterà conoscere l'angolo che la retta t fa colla generatrice l_0: chiamiamo h quest'angolo. Dando ad h tutti i valori possibili avremo tutte le sviluppate della linea data.

Ciò posto, se si osserva il triangolo $t_0 \lambda t$ si vede subito che ang $tl = \delta + h$; inoltre, se si conduce dal punto m la md perpendicolare alla retta l e si dice d la sua lunghezza, si ha $d = t \operatorname{sen} tl$. Ora d è evidentemente il raggio di curvatura della linea data nel punto m, dunque si ha la formola:

$$t = \frac{d}{\operatorname{sen}(\delta + h)}, \tag{1}$$

la quale venne dimostrata con altre considerazioni dai sig.[ri] MOLINS e BRIOSCHI.

Si riferisca ora la linea data a tre assi ortogonali qualisivogliano. Alle projezioni del raggio t su questi tre assi si potrà sostituire la somma delle projezioni delle due rette md e $dt = d \cot(\delta + h)$: ora se si indicano con p, q, r le coordinate del punto m, con x, y, z quelle del punto t e si segnano con apici le derivazioni rispetto all'arco σ della linea data, i coseni degli angoli che le rette md e dt formano rispettivamente coi tre assi sono:

$$dp'', \; dq'', \; dr''; \qquad d(q'r'' - q''r'), \qquad d(r'p'' - r''p'), \qquad d(p'q'' - p''q'),$$

dunque le somme di quelle projezioni saranno:

*) È evidente che δ è anche il complesso degli angoli di contingenza della linea luogo dei centri delle sfere osculatrici della porzione $i_0 i$ di questa linea, la qual porzione è precisamente quella che corrisponde alla $m_0 m$ della linea data, per cui *questi due complessi*, relativi a porzioni corrispondenti delle due linee, *sono costantemente eguali fra loro.* Si dimostra facilmente che, a vicenda, *il complesso degli angoli di contingenza d'una porzione qualunque della linea data equivale a quella degli angoli di torsione della corrispondente porzione di linea luogo dei centri delle sfere osculatrici*: infatti il primo complesso è misurato dalle successive deviazioni delle tangenti alla linea data, ossia dei piani normali ad essa, ed il secondo è misurato dalle successive deviazioni dei piani osculatori della seconda linea, i quali non sono altro che i piani normali della prima.

sull'asse delle x: $d^2 p'' \pm d^2 (q'r'' - q''r') \cot(\delta + h)$,

» y: $d^2 q'' \pm d^2 (r'p'' - r''p') \cot(\delta + h)$,

» z: $d^2 r'' \pm d^2 (p'q'' - p''q') \cot(\delta + h)$.

Ma le projezioni della retta t sono espresse anche da $x - p$, $y - q$, $z - r$, dunque si ha finalmente:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = p + d^2 p'' \pm d^2 (q'r'' - q''r') \cot(\delta + h), \\ y = q + d^2 q'' \pm d^2 (r'p'' - r''p') \cot(\delta + h), \\ z = r + d^2 r'' \pm d^2 (p'q'' - p''q') \cot(\delta + h), \end{cases}$$

le quali formole determinano completamente la sviluppata. Esse concordano con quelle date da Brioschi (citate ricerche) *).

Coll'ajuto della figura pocanzi costruita si vede facilmente che: « *se si distende in un piano la sviluppabile polare d'una linea qualsivoglia, la linea luogo dei centri di curvatura di questa si svolge in quel piano secondo una curva, che è la pedale* (podaire) *di quella secondo cui si svolge la linea luogo dei centri delle sfere osculatrici* » **). Questa proprietà rende manifestissimo che la prima di queste curve non può essere una retta passante per m, a meno che le rette l_0, l_1, ... l non sieno tutte parallele fra loro, cioè che la linea luogo dei centri di curvatura della curva data non può essere una sviluppata di questa, a meno che questa non sia piana (nel qual caso la superficie polare è cilindrica).

È evidente anche che l'angolo formato dal raggio di curvatura iniziale md_0 col qualsivoglia md equivale a quello delle due rette l_0 ed l, cioè a δ. Ne risulta che se, dopo avere distesa nel piano la superficie polare, si riferirà la curva secondo cui si svolge la linea luogo dei centri di curvatura a due assi aventi l'origine nel punto m e diretti, l'uno, che dirò delle ξ, secondo la retta md_0, e l'altro, che dirò delle η, secondo una perpendicolare a questa, si avranno per quella curva (piana) le due seguenti semplicissime equazioni

$$(3)\qquad \xi = d \cos\delta, \qquad \eta = d \operatorname{sen}\delta.$$

È chiaro che si potrà sostituire a δ un angolo $\delta +$ cost.: non si farà così che far ruotare la curva intorno al punto m.

---

*) È evidente che se dal punto qualunque m d'una linea si conducono le tangenti a due qualsivogliano sue sviluppate, queste tangenti formano fra loro un angolo costante. Ciò serve a dimostrare il noto ed importante teorema che: *se due superficie si segano lungo una linea che sia linea di curvatura per entrambe, il loro angolo d'intersezione è costante.* Infatti le normali alle due superficie nei punti della comune intersezione inviluppano due curve che sono due sviluppate dell'intersezione medesima, per cui quelle normali comprendono fra loro un angolo costante.

**) Lancret.

È altrettanto facile ottenere le equazioni di quell'altra curva piana secondo cui si svolge la linea luogo dei centri delle sfere osculatrici: basta osservare che essa è l'inviluppo delle rette l_0, l_1, ... l. Si riferiscano queste rette ai medesimi due assi di pocanzi e si chiami μ il punto in cui la retta md_0, ossia l'asse delle ξ, incontra la retta l. L'equazione di questa sarà

$$\eta = (m\mu - \xi) \cot \delta,$$

ossia, per essere $m\mu = \frac{d}{\cos \delta}$,

$$\xi \cos \delta + \eta \operatorname{sen} \delta = d.$$

Si derivi quest'equazione rispetto alla variabile di cui ritengonsi funzioni le d, δ (per es. l'arco σ), riguardando come costanti le ξ, η e si avrà

$$- \xi \delta' \operatorname{sen} \delta + \eta \delta' \cos \delta = d'.$$

Da queste equazioni si cava

$$(4) \qquad \xi = d \cos \delta - \frac{d'}{\delta'} \operatorname{sen} \delta, \qquad \eta = d \operatorname{sen} \delta + \frac{d'}{\delta'} \cos \delta,$$

le quali rappresentano appunto il cercato sviluppo della linea luogo dei centri delle sfere osculatrici. Indicando con D il raggio di quella fra queste sfere che corrisponde al punto m, si cava dalle precedenti equazioni

$$\xi^2 + \eta^2 = D^2 = d^2 + \frac{d'^2}{\delta'^2},$$

formola conosciuta.

Si trova anche facilmente che il coseno dell'angolo formato dalla linea luogo dei centri di curvatura colla retta l è espresso da $\pm \frac{d}{D}$.

Passeremo ora a trattare il problema inverso, cioè a determinare le curve che segano sotto un angolo variabile con legge data le tangenti di un'altra linea data, le quali curve, in mancanza di una denominazione speciale, chiameremo *sviluppanti* di quella.

Per trovare le equazioni di questo genere di curve sotto una forma semplice ed elegante cominceremo a stabilire le equazioni generali relative al problema delle trajettorie, dando loro una forma che si presta in molti casi all'integrazione più di quella a cui conduce immediatamente l'enunciato stesso del problema.

Supponiamo dapprima che il sistema delle linee di cui si cercano le trajettorie sia piano e rappresentato dall'equazione

$$(1) \qquad \varphi(x, y, a) = 0,$$

dove a è un parametro variabile ed x, y sono coordinate rettangole ordinarie. Sia ω l'angolo variabile sotto cui le trajettorie devono segare le curve di questo sistema: ω sarà una funzione data di x ed y, la quale potrà contenere anche a. L'equazione del problema sarà la seguente:

$$(2) \qquad \frac{\frac{y'}{x'} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}}{1 - \frac{y'}{x'} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}} = \operatorname{tg} \omega,$$

nella quale le derivazioni indicate dagli apici si riferiscono ad una variabile qualsivoglia. Seguendo il metodo ordinario bisognerebbe eliminare a fra le (1), (2) ed integrare l'equazione risultante, con che si avrebbe l'equazione del sistema delle trajettorie.

Ciò posto suppongasi che in seguito all'anzidetta eliminazione di a e successiva integrazione, siasi ottenuta l'equazione integrale

$$\psi(x, y, b) = 0,$$

b costante arbitraria. Se dall'equazione (1) combinata con quest'ultima si ricavassero i valori di x ed y formati con a e b:

$$x = x(a, b), \qquad y = y(a, b)$$

evidentemente questi valori sarebbero tali che, tenendo in essi costante la a e facendo variare solamente b, si avrebbero le coordinate dei punti d'una delle curve del sistema (1), ed invece tenendovi costante la b e facendo variare a, si avrebbero quelle dei punti d'una trajettoria. Dunque le coordinate dei punti di qualsivoglia trajettoria possono riguardarsi quali funzioni di a. Ora l'equazione (2), ritenendo prese le derivate rispetto ad a, si può scrivere come segue:

$$\varphi'(y)\frac{dx}{da} - \varphi'(x)\frac{dy}{da} = \left[\varphi'(x)\frac{dx}{da} + \varphi'(y)\frac{dy}{da}\right]\cot\omega;$$

ma dalla (1) considerata come appartenente ai punti della trajettoria, epperò come tale che in essa varii la a insieme colle x, y, si cava

$$\varphi'(x)\frac{dx}{da} + \varphi'(y)\frac{dy}{da} = -\varphi'(a);$$

dunque fra le derivate $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$ ha luogo l'equazione precedente e la

$$\varphi'(y)\frac{dx}{da} - \varphi'(x)\frac{dy}{da} = -\varphi'(a).\cot\omega.$$

Da queste due equazioni si cava:

$$(3)\quad \frac{dx}{da}=\frac{-[\varphi'(x)+\varphi'(y)\cot\omega]\,\varphi'(a)}{[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(y)]^2},\qquad \frac{dy}{da}=\frac{-[\varphi'(y)-\varphi'(x)\cot\omega]\,\varphi'(a)}{[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(y)]^2};$$

chiamando poi σ l'arco di trajettoria terminato al punto x, y si ha dalle precedenti equazioni

$$(4)\qquad \frac{d\sigma}{da}=\frac{\varphi'(a)}{\operatorname{sen}\omega\sqrt{[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(y)]^2}}.$$

Le equazioni (3) costituiscono le trasformazioni cercate. Se da una di esse, per es. dalla prima, si eliminerà la y col mezzo della (1) si otterrà un'equazione fra a, x e $\frac{dx}{da}$ che integrata darà x in funzione di a e di una costante arbitraria b. Eliminando a fra il risultato di questa integrazione e l'equazione (1) si avrà l'equazione generale delle trajettorie.

Sia ora il sistema dato costituito da linee nello spazio, rappresentate dalle due equazioni

$$(1^{\text{bis}})\qquad \varphi(x, y, z, a)=0,\qquad \psi(x, y, z, a)=0.$$

Ponendo

$$\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y)=A,$$

$$\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z)=B,$$

$$\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x)=C,$$

$$[\varphi'(x)]^2+[\varphi'(y)]^2+[\varphi'(z)]^2=E,$$

$$\varphi'(x)\psi'(x)+\varphi'(y)\psi'(y)+\varphi'(z)\psi'(z)=F,$$

$$[\psi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2+[\psi'(z)]^2=G,$$

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2=\Delta,$$

si ha dalle (1bis), mediante la derivazione rispetto ad una variabile qualisivoglia,

$$\frac{x'}{A}=\frac{y'}{B}=\frac{z'}{C},$$

quindi l'equazione del sistema trajettorio sarà

$$(2^{\text{bis}})\quad \left(A\frac{dx}{da}+B\frac{dy}{da}+C\frac{dz}{da}\right)^2=\Delta\cos^2\omega\left[\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\right],$$

e fra le $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$ avranno luogo le equazioni

$$(a)\qquad\left\{\begin{aligned}\varphi'(x)\frac{dx}{da}+\varphi'(y)\frac{dy}{da}+\varphi'(z)\frac{dz}{da}&=-\varphi'(a),\\ \psi'(x)\frac{dx}{da}+\psi'(y)\frac{dy}{da}+\psi'(z)\frac{dz}{da}&=-\psi'(a),\end{aligned}\right.$$

dalle quali e dalle (2bis) debbonsi ora, analogamente a quanto si è fatto pei sistemi piani, cavare i valori di $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$.

Per abbreviare i calcoli necessarj a quest'uopo si pongano le seguenti denominazioni:

$$\varphi'(a)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(a)=P,\ \varphi'(a)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(a)=Q,\ \varphi'(a)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(a)=R,$$

$$BR-CQ=L,\qquad CP-AR=M,\qquad AQ-BP=N,$$

e si notino le risultanti identità

$$AP+BQ+CR=0,\quad AL+BM+CN=0,\quad LP+MQ+NR=0,$$

$$L^2+M^2+N^2=(P^2+Q^2+R^2)\,\Delta.$$

Ciò posto, si scriva per un momento

$$A\frac{dx}{da}+B\frac{dy}{da}+C\frac{dz}{da}=U,$$

e da quest'equazione, combinata colle (a), si cavino i valori di $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$. Avuto riguardo alle stabilite denominazioni ed alle risultanti identità si troverà facilmente

$$(b)\qquad \Delta\frac{dx}{da}=AU+L,\quad \Delta\frac{dy}{da}=BU+M,\quad \Delta\frac{dz}{da}=CU+N,$$

da cui, quadrando e sommando:

$$\Delta\left(\frac{d\sigma}{da}\right)^2=U^2+P^2+Q^2+R^2.$$

Ora si osservi che la (2bis) può scriversi come segue:

$$U^2=\Delta\cos^2\omega\left(\frac{d\sigma}{da}\right)^2;$$

eliminando $\left(\frac{d\sigma}{da}\right)^2$ fra quest'equazione e la precedente si ha

$$U=\cot\omega\sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

ed eliminando invece U si ha

$$(4^{\text{bis}}) \qquad \frac{d\sigma}{da} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\operatorname{sen}\omega\sqrt{\Delta}}.$$

Sostituendo finalmente il valore U trovato or ora nelle (b), si ottiene:

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{da} = \dfrac{L + A\cot\omega\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\Delta}, \\ \dfrac{dy}{da} = \dfrac{M + B\cot\omega\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\Delta}, \\ \dfrac{dz}{da} = \dfrac{N + C\cot\omega\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\Delta}; \end{cases}$$

equazioni le quali costituiscono le trasformazioni cercate. Eliminando per es. y e z fra la prima di queste e le (1bis), si avrà un'equazione fra a, x e $\frac{dx}{da}$ che integrata darà x in funzione di a e di una costante arbitraria b. Eliminando a fra l'integrale così ottenuto e le (1bis) si avranno le equazioni delle trajettorie di quest'ultimo sistema.

Si noti essere

$$P^2 + Q^2 + R^2 = E[\psi'(a)]^2 - 2F\varphi'(a)\psi'(a) + G[\varphi'(a)]^2;$$

ed inoltre:

$$L = [F\psi'(a) - G\varphi'(a)]\,\varphi'(x) + [F\varphi'(a) - E\psi'(a)]\,\psi'(x),$$

$$M = [F\psi'(a) - G\varphi'(a)]\,\varphi'(y) + [F\varphi'(a) - E\psi'(a)]\,\psi'(y),$$

$$N = [F\psi'(a) - G\varphi'(a)]\,\varphi'(z) + [F\varphi'(a) - E\psi'(a)]\,\psi'(z).$$

Ciò posto procediamo alla ricerca delle sviluppanti d'una linea data, che supporremo a doppia curvatura e rappresentata dalle equazioni

$$\xi(a, b, c) = 0, \qquad \eta(a, b, c) = 0.$$

Le equazioni della sua tangente nel punto (a, b, c) sono

$$b'x - y + (b - ab') = 0, \qquad c'x - z + (c - ac') = 0,$$

dove gli apici indicano derivate prese rispetto alla a. Queste due equazioni, paragonate colle $\varphi = 0$, $\psi = 0$ di pocanzi, dànno, indicando con s l'arco della linea data,

$$\varphi'(x) = b', \qquad \varphi'(y) = -1, \qquad \varphi'(z) = 0, \qquad \varphi'(a) = (x - a)b'',$$

$$\psi'(x) = c', \qquad \psi'(y) = 0, \qquad \psi'(z) = -1, \quad \psi'(a) = (x - a)c'';$$

epperò

$$A = 1,\ B = b',\ C = c',\ E = 1 + b'^2,\ F = b'c',\ G = 1 + c'^2,\ \Delta = s'^2,$$

$$P = (x - a)(b''c' - b'c''),\ Q = (x - a)c'',\ R = -(x - a)b'',$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = (x-a)^2[b''^2 + c''^2 + (b'c'' - b''c')^2] = (x-a)^2(b''^2 + c''^2 - s''^2)s'^2,$$

$$L = -(x - a)s's'',\ M = (x - a)(b''s' - b's'')s',\ N = (x - a)(c''s' - c's'')s'.$$

Le formole (3bis) dànno adunque in questo caso

$$\frac{dx}{da} = \frac{-(x - a)(s'' - \cot\omega\sqrt{b''^2 + c''^2 - s''^2})}{s'},\quad \frac{dy}{da} = \text{ecc.},\quad \frac{dz}{da} = \text{ecc.}$$

Denotando con θ il complesso degli angoli di contingenza della linea data, queste equazioni si possono scrivere così:

$$\frac{dx}{da} = \frac{-(x - a)(s'' - s'\theta'\cot\omega)}{s'},\ \text{ecc. ecc.}$$

Si trasformino le derivate dalla a alla s, e dopo facili riduzioni si otterrà:

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= (x - a)\left(\frac{a''}{a'} + \theta'\cot\omega\right),\\ y' &= (y - b)\left(\frac{b''}{b'} + \theta'\cot\omega\right),\\ z' &= (z - c)\left(\frac{c''}{c'} + \theta'\cot\omega\right).\end{aligned}\right.$$

Pongasi nella prima di queste

$$x = a + ta',$$

dove t è una nuova variabile. Da questa posizione si ha

$$x' = a' + ta'' + t'a';$$

e sostituendo questi valori facilmente si ottiene la seguente:

$$t' - t\theta'\cot\omega = -1,$$

che si integra mediante il moltiplicatore $e^{-\int\theta'\cot\omega ds}$; si ottiene così

$$\text{(II)}\qquad t = -e^{\int\theta'\cot\omega ds}\int e^{-\int\theta'\cot\omega ds}\,ds;$$

da cui, sostituendo nel valore di x ed operando in modo analogo per le altre formole,

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} x = a - a'e^{\int\theta'\cot\omega ds}\int e^{-\int\theta'\cot\omega ds}ds, \\ y = b - b'e^{\int\theta'\cot\omega ds}\int e^{-\int\theta'\cot\omega ds}ds, \\ z = c - c'e^{\int\theta'\cot\omega ds}\int e^{-\int\theta'\cot\omega ds}ds. \end{cases}$$

Queste equazioni dànno le coordinate della trajettoria cercata. Evidentemente la t data dalla (II) esprime il valore della porzione di tangente alla linea data compresa fra il punto di contatto e la trajettoria.

Sostituendo poi nelle (I) i valori di $x - a$, $y - b$, $z - c$ dati dalle (III), quadrando i risultati e sommando si ha

$$\text{(IV)}\qquad \sigma' = \frac{\theta' e^{\int\theta'\cot\omega ds}}{\operatorname{sen}\omega}\cdot\int e^{-\int\theta'\cot\omega ds}ds.$$

Se ω fosse costante si avrebbero le formole

$$\text{(II*)}\qquad t = -e^{\theta\cot\omega}\int e^{-\theta\cot\omega}ds,$$

$$\text{(III*)}\qquad \begin{cases} x = a - a'e^{\theta\cot\omega}\int e^{-\theta\cot\omega}ds, \\ y = b - b'e^{\theta\cot\omega}\int e^{-\theta\cot\omega}ds, \\ z = c - c'e^{\theta\cot\omega}\int e^{-\theta\cot\omega}ds, \end{cases}$$

$$\text{(IV*)}\qquad \sigma' = \frac{\theta' e^{\theta\cot\omega}}{\operatorname{sen}\omega}\int e^{-\theta\cot\omega}ds.$$

Finalmente, se le sviluppanti fossero le ordinarie si avrebbe $\omega = \frac{1}{2}\pi$, epperò:

$$t = -s + \text{cost.},$$

$$x = a - \frac{da}{ds}(s + \text{cost.}),$$

$$y = b - \frac{db}{ds}(s + \text{cost.}),$$

$$z = c - \frac{dc}{ds}(s + \text{cost.}),$$

$$\sigma = \text{Cost.} + \int s\,\theta' ds + \theta.\,\text{cost.},$$

formole notissime, e nelle quali è da osservare che l'arbitraria indicata con cost. è dappertutto la stessa, ma quella designata con Cost. ne può differire. L'integrale $\int s\theta' ds$ dev'esser quello che si annulla per $s = 0$.

NOTA.

Nella presente Nota raccolgo altre proprietà delle sviluppoidi *ordinarie*, delle quali per brevità ometto la facile dimostrazione.

Si rappresenti con s la linea data e con S_ω la superficie luogo geometrico di tutte le sviluppoidi corrispondenti all'angolo d'intersezione costante ω. Se da un punto della s si conduce il cono (retto) involvente la S_ω, questo cono tocca la S_ω secondo una linea (un'iperbole). Variando ω si otterrà una serie di linee siffatte ed il loro luogo geometrico sarà una superficie che dirò Σ. *Questa superficie è del terz'ordine*, e si può supporre generata nel modo seguente: *si immagini la retta condotta dal centro del circolo osculatore della linea s nel punto m perpendicolarmente al piano di questo circolo, indi si concepisca che una circonferenza varii di raggio e di posizione, conservandosi sempre tangente alla linea s nel punto m e non cessando mai di avere il punto diametralmente opposto in comune colla retta suindicata. Questa circonferenza genererà la superficie* Σ.

La considerazione di questa superficie porge il modo di esprimere il raggio di qualsivoglia sviluppoide in funzione unicamente del raggio di curvatura della trajettoria e di due angoli individuanti la posizione del raggio della sviluppoide. Chiamando α l'angolo formato dai piani osculatori della trajettoria e della sviluppoide si ha infatti

$$t = \frac{d \operatorname{sen} \omega}{\cos \alpha},$$

formola che si trova anche nella citata Memoria del sig. Brioschi, poichè α è ciò che egli chiama c_3.

La superficie Σ è anche la trasformata per raggi vettori reciproci di una superficie cilindrica a base circolare, trasformata ottenuta ponendo il centro d'inversione in un punto della superficie cilindrica.

La seguente proprietà è una conseguenza evidente di quelle che precedono:

Se nello spazio si immagina un piano, per ciascun punto di questo passa una sviluppoide della linea s; quei punti del piano in cui le tangenti alle sviluppoidi concorrono tutte in un medesimo punto della s, appartengono ad una linea di terz'ordine, qualunque sia la s.

È bene osservare che se si pone $t = \sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2 + (r - z)^2}$, l'equa-

zione della superficie Σ è rappresentabile colla

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} = 0,$$

ritenuto che le x, y, z sieno coordinate correnti e le p, q, r, σ parametri individuanti la superficie stessa.

La serie di tutte le superficie Σ corrispondenti agli infiniti punti della s dà luogo ad un inviluppo. *Questo inviluppo tocca ciascuna inviluppata Σ lungo una linea piana di terz'ordine, intersezione di Σ col piano condotto per la retta rettificante e pel centro della sfera osculatrice.*

Anche la serie di tutte le superficie S_ω corrispondenti agli infiniti valori di ω ammette un inviluppo. *L'inviluppo di tutte le superficie analoghe ad S_ω è identico all'inviluppo di tutte quelle analoghe a Σ.*

Questo inviluppo comune, che dirò Π, ha dunque due caratteristiche distinte: l'una è la linea di contatto con Σ, l'altra la linea di contatto con S_ω. Rappresentando con D il raggio della sfera osculatrice di s, con x, y, z le coordinate correnti di Π, e cogli apici derivazioni rispetto a σ, si hanno le formole

$$x = p + \frac{d^2 (q'''r' - q'r''')\,\text{sen}^2\omega}{\delta'} - \frac{D^2 d^3 \delta' (q''r''' - q'''r'')\,\text{sen}^2\omega \cos\omega}{d'\cos\omega + d\delta' \sqrt{D^2\delta'^2\,\text{sen}^2\omega - \cos^2\omega}},\ y = \text{ecc.},\ z = \text{ecc.}$$

Se in queste formole si considerano le ω, σ come variabili indipendenti, esse rappresentano la superficie Π: le linee $\sigma = \text{cost.}$, $\omega = \text{cost.}$ ne sono le due caratteristiche, cioè le linee di contatto colle superficie Σ ed S_ω.

Quando $\omega = \frac{1}{2}\pi$ queste formole dànno le coordinate del centro della sfera osculatrice, del che è facile persuadersi anche *a priori*.

III.

DI ALCUNE FORMOLE RELATIVE ALLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

(Lettera al prof. B. Tortolini).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo IV (1861), pp. 283-284.

Signor Professore,

Ordinariamente l'equazione delle linee di curvatura, e l'equazione da cui dipendono i raggi di curvatura d'una superficie, formate con coordinate curvilinee p e q, si ottengono con processi alquanto laboriosi. Mi permetto di accennarle una assai facile maniera di giungere a quelle formole, la quale con poche modificazioni si applica anche al caso delle superficie rappresentate da equazioni della forma $W(x, y, z) = 0$.

Usando le solite segnature di GAUSS *) rappresentando con ξ, η e ζ le coordinate correnti della normale alla superficie nel punto (x, y, z) e con ρ la distanza dei due punti (ξ, η, ζ), (x, y, z), si hanno le

$$\xi = x + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} A, \qquad \eta = y + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} B, \qquad \zeta = z + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} C.$$

Affinchè le x, y, z appartengano ad una linea di curvatura, bisogna che insieme colle equazioni precedenti sussistano le derivate loro prese rispetto a quella variabile di cui sono funzioni le p, q relative alla linea di curvatura, considerando le ξ, η, ζ come costanti, ed allora la ρ diventa evidentemente un raggio di curvatura della superficie.

*) *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Si hanno così le

$$\frac{\partial x}{\partial p}p' + \frac{\partial x}{\partial q}q' + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial A}{\partial p}p' + \frac{\partial A}{\partial q}q'\right) + \left(\frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\right)' A = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial p}p' + \frac{\partial y}{\partial q}q' + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial B}{\partial p}p' + \frac{\partial B}{\partial q}q'\right) + \left(\frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\right)' B = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p}p' + \frac{\partial z}{\partial q}q' + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial C}{\partial p}p' + \frac{\partial C}{\partial q}q'\right) + \left(\frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}\right)' C = 0.$$

Si moltiplichino ordinatamente queste equazioni prima per $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p}$ poi per $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ e si sommino ciascuna volta i risultati. Le equazioni che in tal modo si ottengono

$$Ep' + Fq' - \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}(Dp' + D'q') = 0,$$

$$Fp' + Gq' - \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}(D'p' + D''q') = 0,$$

conducono immediatamente alle formole che cerchiamo. Infatti:

1° Se fra esse si elimina ρ, si ottiene

$$(Ep' + Fq')(D'p' + D''q') - (Fp' + Gq')(Dp' + D'q') = 0,$$

nota equazione delle linee di curvatura.

2° Se invece se ne elimina il rapporto $p' : q'$, si ottiene

$$\left(\frac{E}{\rho} - \frac{D}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{G}{\rho} - \frac{D''}{\sqrt{\Delta}}\right) - \left(\frac{F}{\rho} - \frac{D'}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = 0,$$

equazione in ρ che serve a determinare i due raggi di curvatura.

Milano, 1° settembre 1862.

IV.

SOLUZIONE D'UN PROBLEMA RELATIVO ALLE SUPERFICIE DI SECOND'ORDINE.

Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 68-73 *).

Nell'annata 1862 del giornale « Nouvelles Annales de Mathématiques » venne proposto il seguente problema:

Data una superficie di second'ordine ed un punto, luogo d'uno spettatore, determinare l'angolo sotto il quale questi vedrà la superficie, ritenuto che quest'angolo sia misurato dall'angolo solido del cono tangente.

La soluzione di questo problema forma l'oggetto della presente breve Nota.

I.

Sia

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione della superficie di 2° ordine, riferita a tre assi ortogonali; (x_0, y_0, z_0) il punto fisso, luogo dello spettatore.

Un raggio visuale qualsivoglia è rappresentato dalle equazioni

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = \rho, \tag{2}$$

*) Una traduzione di questa Nota in lingua francese si trova inserita nel giornale « Nouvelles Annales de Mathématiques », 2ème série, tome II (1863), pp. 355-362.

[N. d. R.]

nelle quali λ, μ, ν determinano la direzione del raggio, ρ la posizione di uno qualunque de' suoi punti. Sostituendo nell'equazione (1) i valori di x, y, z dati dalle (2) e scrivendo per semplicità φ_0 in luogo di $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, si ottiene l'equazione seguente:

$$0 = \varphi_0 + \rho\left(\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + \mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} + \nu\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\rho^2\left(\lambda^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0^2} + \mu^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0^2} + \nu^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0^2} + 2\mu\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0\partial z_0} + 2\nu\lambda\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0\partial x_0} + 2\lambda\mu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0\partial y_0}\right),$$

dove $\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}$, ecc. rappresentano i risultati della sostituzione di x_0, y_0, z_0 al posto delle x, y, z nelle funzioni $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, ecc. L'equazione precedente porge i valori di ρ corrispondenti alle due intersezioni del raggio visuale colla superficie: se dunque il raggio è tangente alla superficie, questi due valori debbono essere fra loro eguali, e si avrà:

$$\left(\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + \mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} + \nu\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\right)^2 =$$

$$= 2\varphi_0\left(\lambda^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0^2} + \mu^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0^2} + \nu^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0^2} + 2\mu\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0\partial z_0} + 2\nu\lambda\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0\partial x_0} + 2\lambda\mu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0\partial y_0}\right).$$

Eliminando da questa equazione le λ, μ, ν col mezzo delle equazioni (2) si avrà evidentemente l'equazione del cono visuale. Per tal modo, riferendo questo cono a tre nuovi assi paralleli ai primi ed aventi l'origine nel vertice del cono stesso, l'equazione del cono sarà la seguente:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0, \tag{3}$$

in cui s'è posto, per brevità,

$$A = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)^2 - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0^2}, \qquad D = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0\partial z_0},$$

$$B = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\right)^2 - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y_0^2}, \qquad E = \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0\partial x_0},$$

$$C = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\right)^2 - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z_0^2}, \qquad F = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} - 2\varphi_0\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_0\partial y_0}.$$

Nell'equazione (3) le x, y, z denotano coordinate relative ai nuovi assi, ma le x_0, y_0, z_0 rappresentano sempre le coordinate del punto fisso rispetto agli assi primitivi.

II.

Cerchiamo ora di far scomparire dall'equazione del cono i termini contenenti i rettangoli delle variabili.

Per tal uopo noi riferiremo il cono ad un nuovo sistema d'assi rettangolari delle x', y', z' aventi la medesima origine di quelli del sistema precedente, e stabiliremo le formule di trasformazione seguenti:

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z',$$

$$y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z',$$

$$z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'.$$

Introducendo questi valori nell'equazione (3) si otterrà un risultato della forma:

$$A' x'^2 + B' y'^2 + C' z'^2 + 2 D' y' z' + 2 E' z' x' + 2 F' x' y' = 0;$$

laonde, ponendo

$$A' = a, \; B' = b, \; C' = c; \qquad D' = 0, \; E' = 0, \; F' = 0,$$

si avranno sei equazioni, le quali, combinate colle note relazioni fra i nove coseni, serviranno a determinare questi nove coseni e le tre quantità a, b, c, dopo di che l'equazione del cono sarà ridotta alla forma

$$a x'^2 + b y'^2 + c z'^2 = 0. \tag{4}$$

Si può, come è noto, determinare a, b e c senza avere bisogno di trovare i valori dei nove coseni, ed a questo risultato si perviene rapidamente nel modo seguente. Se si sviluppano le equazioni $A' = a$, $F' = 0$, $E' = 0$, si ottiene

$$(A\alpha_1 + F\alpha_2 + E\alpha_3)\alpha_1 + (F\alpha_1 + B\alpha_2 + D\alpha_3)\alpha_2 + (E\alpha_1 + D\alpha_2 + C\alpha_3)\alpha_3 = a,$$

$$(A\alpha_1 + F\alpha_2 + E\alpha_3)\beta_1 + (F\alpha_1 + B\alpha_2 + D\alpha_3)\beta_2 + (E\alpha_1 + D\alpha_2 + C\alpha_3)\beta_3 = 0,$$

$$(A\alpha_1 + F\alpha_2 + E\alpha_3)\gamma_1 + (F\alpha_1 + B\alpha_2 + D\alpha_3)\gamma_2 + (E\alpha_1 + D\alpha_2 + C\alpha_3)\gamma_3 = 0.$$

Moltiplicando ordinatamente queste equazioni prima per α_1, β_1, γ_1, poscia per α_2, β_2, γ_2, da ultimo per α_3, β_3, γ_3 e sommando ciascuna volta i risultati, si trova

$$(A - a)\alpha_1 + F\alpha_2 + E\alpha_3 = 0,$$

$$F\alpha_1 + (B - a)\alpha_2 + D\alpha_3 = 0,$$

$$E\alpha_1 + D\alpha_2 + (C - a)\alpha_3 = 0.$$

Eliminando da queste equazioni i coseni α_1, α_2, α_3, che non possono essere nulli tutti e tre ad un tempo, si ottiene

$$\begin{vmatrix} A-a & F & E \\ F & B-a & D \\ E & D & C-a \end{vmatrix} = 0 .$$

La quantità a deve dunque soddisfare a questa equazione. Operando analogamente si troverebbe che le quantità b e c devono parimenti soddisfare a due equazioni le quali non differiscono dalla precedente che per lo scambio di a con b o con c. Ne risulta che a, b, c sono le tre radici dell'equazione cubica in λ,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

che indicheremo, per brevità, con $\Delta = 0$.

III.

È noto che le radici dell'equazione $\Delta = 0$ sono tutte reali. Nel nostro caso però importa osservare che se queste radici avessero tutte e tre il medesimo segno, il cono visuale sarebbe immaginario. Volendo dunque prescindere da questo caso, ammetteremo che una di queste radici, p. e. a, sia di segno contrario alle altre due. Si può anzi supporre che a sia una quantità positiva, giacchè se non lo fosse attualmente, basterebbe mutare il segno a ciascuna delle quantità A, B, ..., ciò che è manifestamente lecito di fare. Noi ammetteremo quindi che a sia una quantità positiva, b e c quantità negative. Per tale ipotesi è chiaro che dei tre assi del cono visuale, quello delle x' è interno al cono, mentre quelli delle y' e delle z' sono esterni al medesimo. Noi non considereremo di questo cono che la falda stendentesi dal lato delle x' positive.

IV.

Ciò posto, immaginiamo la superficie sferica avente il centro nel vertice del cono ed il raggio uguale all'unità. Il cono visuale incide in questa superficie un'ellisse sferica il cui centro interno è il punto in cui la superficie sferica è incontrata dall'asse positivo delle x'. Noi misureremo l'angolo solido del cono visuale mediante il rapporto

fra l'area di questa ellisse sferica e l'area della superficie totale della sfera. Per tal guisa la quistione è ridotta alla ricerca dell'area dell'ellisse sferica.

Riferendo i punti della superficie sferica ad un sistema di coordinate polari per mezzo delle formole:

$$x' = \cos\beta\cos\alpha\,, \qquad y' = \cos\beta\,\text{sen}\,\alpha\,, \qquad z' = \text{sen}\,\beta\,,$$

l'equazione in α, β dell'ellisse sferica è la seguente:

$$a\cos^2\beta\cos^2\alpha + b\cos^2\beta\,\text{sen}^2\alpha + c\,\text{sen}^2\beta = 0\,.$$

Siccome la quantità $-c\,\text{tg}^2\beta$ è, per le ipotesi fatte, essenzialmente positiva, così lo stesso ha luogo per la quantità

$$a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha\,,$$

ed a maggior ragione per la quantità

$$a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha - c\,;$$

noi possiamo dunque mettere l'equazione precedente sotto la forma

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha}}{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha - c}} \tag{6}$$

senza temere la comparsa degli immaginarj, e possiamo di più riguardare entrambi i radicali come positivi, giacchè non abbiam bisogno di considerare che il quarto d'ellisse situato nella regione delle x', y', z' positive.

Ora la formola generale per la quadratura indefinita delle aree sferiche è $\int \text{sen}\,\beta\,d\alpha$. Se dunque si osserva che la figura da noi considerata è simmetrica rispetto agli archi di circolo massimo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, si avrà, indicando con Ω l'angolo solido cercato,

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0} \frac{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha}}{\sqrt{a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha - c}}\,d\alpha\,, \tag{7}$$

dove α_0 è il valore di α che corrisponde a $\beta = 0$, cioè il valore reale e positivo dato dall'equazione

$$b\,\text{tg}^2\alpha_0 + a = 0\,,$$

ossia

$$\text{sen}^2\alpha_0 = \frac{a}{a-b}\,.$$

Poniamo

$$a\cos^2\alpha + b\,\text{sen}^2\alpha = \lambda\,, \tag{8}$$

dove λ è una nuova variabile. Scrivendo quest'equazione sotto la forma

$$a - (a - b)\,\mathrm{sen}^2\,\alpha = \lambda$$

si vede facilmente che da $\alpha = 0$, fino ad $\alpha = \alpha_0$, λ è sempre positivo e decrescente dal valore $\lambda = a$ al valore $\lambda = 0$, dimodochè le quantità $a - \lambda$, $\lambda - b$, $\lambda - c$ non diventano mai negative entro i limiti dell'integrazione. Si può dunque cavare dalla (8),

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\lambda - b}}{\sqrt{a - b}}, \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{a - \lambda}}{\sqrt{a - b}}$$

e quindi

$$d\alpha = -\frac{d\lambda}{2\sqrt{a - \lambda}\,\sqrt{\lambda - b}},$$

nelle quali formole i radicali sono presi positivamente per la ragione già addotta.

In virtù di questa trasformazione la formola (7) diventa:

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi}\int_a^0 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(a - \lambda)(\lambda - b)(\lambda - c)}}\,d\lambda.$$

Ora, essendo a, b, c le tre radici dell'equazione $\Delta = 0$, il polinomio Δ non può differire che per un fattore costante dalla quantità che compare sotto il radicale del denominatore; ma il termine che contiene λ^3 ha evidentemente lo stesso coefficiente nelle due espressioni, dunque queste sono assolutamente identiche, epperò si può scrivere:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Delta}}\,d\lambda.$$

Tale è la formola che porge la generale soluzione del problema.

V.

Per verificare facilmente questa formola si possono fare speciali ipotesi. Noi sceglieremo le due seguenti:

1°) Supponiamo dapprima che la superficie data sia una sfera, cioè che si abbia:

$$2\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

e che il punto fisso sia sull'asse delle x ad una distanza h dall'origine ($h > r$). In tal caso si ha $x_0 = h$, $y_0 = z_0 = 0$, $2\varphi_0 = h^2 - r^2$, epperò $A = r^2$, $B = -(h^2 - r^2)$, $C = -(h^2 - r^2)$, $D = E = F = 0$; da cui

$$\Delta = (r^2 - \lambda)(h^2 - r^2 + \lambda)^2, \qquad a = r^2,$$

e finalmente

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r^2} \frac{\sqrt{\lambda}}{(h^2 - r^2 + \lambda)\sqrt{r^2 - \lambda}}\, d\lambda .$$

Ponendo $\lambda = \frac{r^2 t^2}{1 + t^2}$, dove t è una nuova variabile, questa formola si trasforma nella seguente

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \left(\frac{ht}{\sqrt{h^2 - r^2}}\right)^2},$$

da cui integrando si ha:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{h}\right).$$

Ora è facile riscontrare l'esattezza di questo risultato mediante la nota formola per la quadratura della zona sferica.

2°) Supponiamo invece che la superficie sia qualsivoglia, ma che il punto (x_0, y_0, z_0) sia preso in essa. In tal caso è evidente che per le fatte convenzioni l'angolo visuale deve trovarsi uguale a $\frac{1}{2}$.

Ora, essendo per l'ipotesi fatta $\varphi_0 = 0$, si ha

$$A = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}\right)^2, \qquad B = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\right)^2, \qquad C = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0}\right)^2,$$

$$D = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0}, \qquad E = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}, \qquad F = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0},$$

da cui, dopo facili sviluppi, risulta:

$$\Delta = \lambda^2(a - \lambda), \qquad a = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0}\right)^2.$$

La formola generale porge dunque in questo caso

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{a} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{a - \lambda}}\, d\lambda .$$

Ponendo $\lambda = \frac{a\theta^2}{1 + \theta^2}$, dove θ è una nuova variabile, la formola precedente si trasforma nella $\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + \theta^2}$, da cui si deduce immediatamente $\Omega = \frac{1}{2}$, appunto come doveva essere.

Milano, ottobre 1862.

V.

INTORNO ALLE CONICHE DEI NOVE PUNTI E AD ALCUNE QUISTIONI CHE NE DIPENDONO.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, vol. II (1862), pp. 361-395 *).

(Letta nella sessione 12 marzo 1863).

In un articolo inserito nel nuovo « Giornale di Matematiche » che si stampa a Napoli **) il chiar.mo sig. prof. TRUDI ha richiamato l'attenzione degli studiosi sopra alcuni assai eleganti teoremi relativi a quel che chiamasi *circolo dei nove punti,* ed ha manifestato il desiderio di vederne una dimostrazione semplice e concisa, qual sembra che manchi finora.

I teoremi a cui alludo vengono generalmente attribuiti a STEINER, che li enunciò dapprima nel giornale « Annales de GERGONNE » ***), dappoi, generalizzandoli, in una Memoria pubblicata a Roma nel 1844 ed inserita nel « Giornale Arcadico » †). Lo stesso STEINER però, nel suo opuscolo intitolato: *Die geometrischen Konstructionen mittelst der*

*) Un'altra Nota sullo stesso argomento fu pubblicata dall'A. nel Volume I (1863) del Giornale di Matematiche (pp. 109-118) sotto il titolo *Sulle coniche di nove punti.* Tutti gli argomenti contenuti in questa figurano nella Nota qui pubblicata, mentre quest'ultima presenta con maggiori sviluppi la parte riguardante le trasformazioni quadratiche (Art. dal VII in poi). Perciò ritenemmo opportuno di riprodurre qui solo la Nota più completa, togliendo dall'altra le figure che ne rendono più chiara la lettura. [N. d. R.].

**) Volume I (1863), pag. 29.

***) Tomo XIX (1828), pag. 42.

†) Tomo XCIX, pag. 147.

geraden Linie und eines festen Kreises, § 12 (Berlino, 1833), dichiarò che uno di essi era già stato enunciato da FEUERBACH, prima ancora ch'egli, senza sapere d'essere stato prevenuto, lo avesse pubblicato negli « Annales de GERGONNE ».

Alcuni di questi teoremi vennero poi riprodotti nel 1842 dal compianto TERQUEM, nel primo volume del suo giornale « Nouvelles Annales » (pag. 196), e più recentemente ancora ridimostrati, come nuovi, dall'illustre HAMILTON, come pure da HART, SALMON e CASEY *). Ne trattò con somma eleganza anche il chiar.mo sig. prof. BATTAGLINI, nei « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli » **).

La dimostrazione che ne ha data da ultimo il sig. TRUDI, benchè breve ed elegante, non si applica che ad un caso particolare dei teoremi enunciati dallo STEINER nella Memoria del 1844, e però nel presente breve lavoro mi propongo di ripigliare nuovamente quest'argomento, considerandolo nella sua generalità e traendone occasione per esaminare alquanto da vicino la natura e le proprietà di una trasformazione geometrica che si offre quale spontanea conseguenza dei teoremi precedentemente dimostrati. La discussione di un caso speciale di questa trasformazione mostrerà l'intima connession sua con altre assai conosciute e di uso frequentissimo nella geometria.

I.

Cominciamo dallo stabilire alcune formole che ci saranno utili in seguito.

Abbiasi in un piano un triangolo ABC i cui lati BC, CA, AB sieno rispettivamente rappresentati dalle equazioni

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0,$$

e sieno $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ le coordinate trilineari di due punti M ed N esistenti nel piano stesso. Ogni volta che occorra fissare il significato di queste coordinate, supporremo ch'esse sieno proporzionali alle lunghezze delle perpendicolari condotte dai punti M ed N ai tre lati del triangolo.

Ciò premesso, proponiamoci di determinare le coordinate del punto P, coniugato armonico rispetto al segmento MN di quell'altro punto Q nel quale la retta MN è incontrata dalla trasversale

$$lx+my+nz=0.$$

---

*) Si veda ad es. il « Quarterly Journal of pure and applied Mathematics », vol. IV (1861), pp. 152, 245.

**) Fascicolo I (1862), pag. 24.

L'equazione della retta MN è

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)x + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)y + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)z = 0;$$

dunque le coordinate del punto Q, in cui essa incontra la trasversale, son date dalle formole

$$x \equiv \alpha_2(m\beta_1 + n\gamma_1) - \alpha_1(m\beta_2 + n\gamma_2),$$

$$y \equiv \beta_2(n\gamma_1 + l\alpha_1) - \beta_1(n\gamma_2 + l\alpha_2),$$

$$z \equiv \gamma_2(l\alpha_1 + m\beta_1) - \gamma_1(l\alpha_2 + m\beta_2),$$

ossia, ponendo

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = h_1,$$

$$l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2 = h_2,$$

dalle seguenti:

$$x \equiv h_1\alpha_2 - h_2\alpha_1, \qquad y \equiv h_1\beta_2 - h_2\beta_1, \qquad z \equiv h_1\gamma_2 - h_2\gamma_1,$$

dove il segno $\equiv$ indica che le x, y, z sono quantità semplicemente proporzionali ai secondi membri delle precedenti equazioni. Ne risulta che le equazioni delle tre rette AM, AN, AP sono rispettivamente

$$\gamma_1 y - \beta_1 z = 0,$$

$$\gamma_2 y - \beta_2 z = 0,$$

$$(h_1\gamma_2 - h_2\gamma_1)y = (h_1\beta_2 - h_2\beta_1)z.$$

Scrivendo l'ultima di queste sotto la forma

$$h_2(\gamma_1 y - \beta_1 z) - h_1(\gamma_2 y - \beta_2 z) = 0,$$

si vede subito che la conjugata armonica della retta da essa rappresentata rispetto alle altre due è data dall'equazione

$$h_2(\gamma_1 y - \beta_1 z) + h_1(\gamma_2 y - \beta_2 z) = 0,$$

ossia dalla

$$\frac{y}{h_2\beta_1 + h_1\beta_2} = \frac{z}{h_2\gamma_1 + h_1\gamma_2}.$$

Dovendo le coordinate del punto cercato P soddisfare a quest'ultima equazione ed alle analoghe in z, x ed x, y, è chiaro che si hanno per esse le formole

$$(a) \qquad x \equiv h_2\alpha_1 + h_1\alpha_2, \qquad y \equiv h_2\beta_1 + h_1\beta_2, \qquad z \equiv h_2\gamma_1 + h_1\gamma_2,$$

oppure le seguenti:

$$x \equiv \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2}, \qquad y \equiv \frac{\beta_1}{h_1} + \frac{\beta_2}{h_2}, \qquad z \equiv \frac{\gamma_1}{h_1} + \frac{\gamma_2}{h_2}.$$

Supponiamo ora di avere nel piano un sistema di m punti disposti in modo qualunque e distribuiti in due gruppi, l'uno di r e l'altro di $m-r$ punti; e sieno α_i, β_i, γ_i le coordinate dell'i-esimo di tali punti. Poscia consideriamo un punto O le cui coordinate X, Y, Z sieno funzioni delle coordinate degli m punti del sistema, e due altri punti, O_r ed O_{m-r}, le cui coordinate X_r, Y_r, Z_r ed X_{m-r}, Y_{m-r}, Z_{m-r} sieno rispettivamente formate colle coordinate dei primi r punti e degli ultimi $m-r$ punti del sistema nello stesso modo in cui quelle del punto O sono formate colle coordinate di tutti gli m punti. Supponiamo finalmente che, per la natura delle funzioni X, X_r, X_{m-r} ed analoghe, si abbia

$$X = X_r + X_{m-r}, \qquad Y = Y_r + Y_{m-r}, \qquad Z = Z_r + Z_{m-r}.$$

Ciò posto, se l'equazione

$$Lx + My + Nz = 0$$

rappresenta la retta che congiunge i due punti O_r ed O_{m-r}, si avranno le due identità:

$$LX_r + MY_r + NZ_r = 0, \qquad LX_{m-r} + MY_{m-r} + NZ_{m-r} = 0,$$

e quindi anche la seguente:

$$L(X_r + X_{m-r}) + M(Y_r + Y_{m-r}) + N(Z_r + Z_{m-r}) = 0,$$

ossia, per le fatte ipotesi,

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Quest'ultima equazione mostra che *la retta in discorso contiene il punto* O, *e ciò, non solo qualunque sia il numero* m *dei punti del sistema, ma anche qualunque sia il modo in cui questi* m *punti sono distribuiti nei due gruppi considerati.*

Le condizioni imposte alle funzioni X, Y, Z sono soddisfatte ponendo

$$\text{(b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} X &\equiv \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \dots + \frac{\alpha_m}{h_m}, \\ Y &\equiv \frac{\beta_1}{h_1} + \frac{\beta_2}{h_2} + \dots + \frac{\beta_m}{h_m}, \\ Z &\equiv \frac{\gamma_1}{h_1} + \frac{\gamma_2}{h_2} + \dots + \frac{\gamma_m}{h_m}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$h_i = l\alpha_i + m\beta_i + n\gamma_i,$$

ed allora il punto O diventa quello che dicesi *centro armonico* del sistema di punti ri-

spetto alla trasversale

$$lx + my + nz = 0\,.$$

Quando $m = 2$ le formole precedenti non differiscono da quelle trovate pocanzi direttamente.

Quando $m = 3$ esse dànno le coordinate del centro armonico di un sistema di tre punti rispetto ad una trasversale, ossia le coordinate di quel punto nel quale concorrono le tre rette che congiungono ciascun punto col centro armonico degli altri due rispetto alla trasversale medesima.

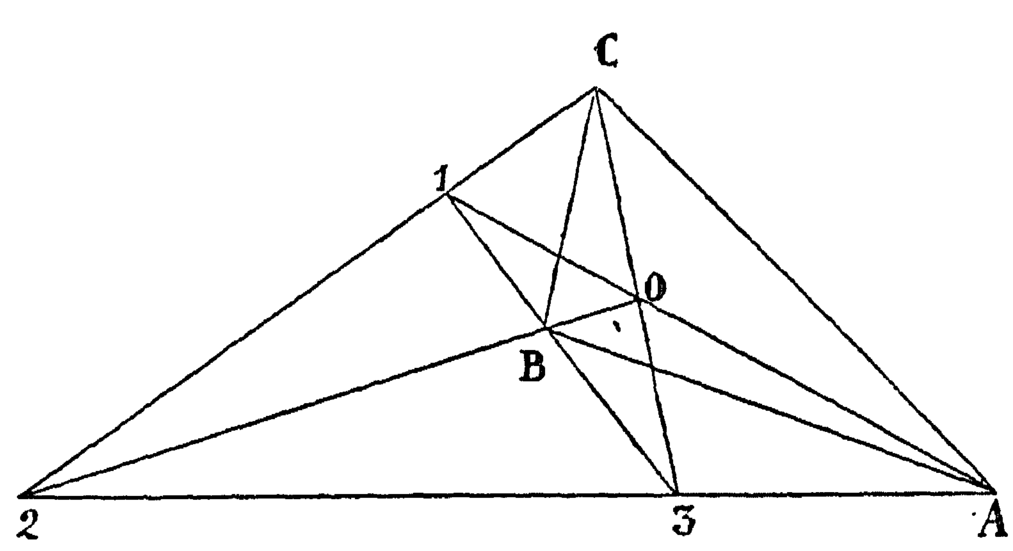
Quando $m = 4$ esse dànno le coordinate del centro armonico di un sistema di quattro punti, ossia le coordinate di quel punto nel quale concorrono le quattro rette che congiungono ciascuno dei punti dati col centro armonico degli altri tre, ovvero le tre rette che congiungono il centro armonico di ciascuna coppia di punti, col centro armonico dell'altra. Ecc. ecc.

Torniamo ora alla quistione propostaci.

II.

Sieno dati in un piano quattro punti, che indicheremo coi numeri 0, 1, 2, 3: il sistema costituito da questi quattro punti e dalle sei rette che li congiungono a due a due, è ciò che si chiama *quadrangolo completo*.

Volendo investigare le proprietà di questa figura, conviene riferirla ad un sistema di assi coordinati che sia disposto simmetricamente rispetto alla figura stessa. Tale è il sistema delle tre rette che congiungono a due a due i punti d'intersezione delle tre coppie di lati opposti. Indicheremo con A, B, C questi tre punti ed assumeremo il triangolo da essi determinato come triangolo fondamentale, rappresentandone i lati BC, CA, AB rispettivamente con $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



In conseguenza di questa scelta del triangolo fondamentale è facilmente veduto che, indicando con a, b, c tre quantità i cui rapporti sono determinati dalla forma del

quadrangolo, i quattro vertici di questo possono essere rappresentati dai seguenti quattro sistemi di valori dei rapporti $x : y : z$

vertice	0	$a : b : c,$
»	1	$-a : b : c,$
»	2	$a : -b : c,$
»	3	$a : b : -c.$

Infatti il punto 1, per esempio, è l'intersezione delle due rette A0 e B1, la seconda delle quali è, per le note proprietà del quadrangolo completo, conjugata armonica di B0 rispetto a BA ed a BC; le equazioni delle rette A0 e B1 sono dunque

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0,$$

da cui si cava, pel loro punto d'incontro,

$$x : y : z = -a : b : c,$$

come qui retro si è indicato.

Ciò premesso, conduciamo nel piano una trasversale qualunque

$$(1) \qquad lx + my + nz = 0,$$

e determiniamo i punti conjugati armonici di quelli in cui essa sega i sei segmenti rettilinei determinati dai quattro punti 0, 1, 2, 3 presi a due a due. A ciò servono le formole (a) dell'articolo precedente. Se per es. si considera il segmento 01, si ha

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = a : b : c, \qquad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = -a : b : c,$$

e quindi, ponendo

$$la + mb + nc = h,$$

si trova

$$h_1 = h, \qquad h_2 = h - 2la.$$

Dunque le coordinate del centro armonico di quel segmento sono date dalle formole:

$$x : y : z = -la^2 : b(h - la) : c(h - la),$$

ossia dalle seguenti:

$$x : y : z = -\frac{la^2}{mb + nc} : b : c.$$

Procedendo analogamente si troverà che i punti armonici esistenti rispettivamente nei segmenti 01, 02, 03, 23, 31, 12 sono definiti dai rapporti seguenti:

$$-\frac{la^2}{mb+nc}:b:c, \qquad a:-\frac{mb^2}{nc+la}:c, \qquad a:b:-\frac{nc^2}{la+mb},$$

$$-\frac{la^2}{mb-nc}:b:-c, \qquad -a:-\frac{mb^2}{nc-la}:c, \qquad a:-b:-\frac{nc^2}{la-mb}.$$

Ora è facilissimo verificare che queste sei terne di valori soddisfanno all'equazione

$$\frac{la^2}{x}+\frac{mb^2}{y}+\frac{nc^2}{z}=0, \tag{2}$$

che rappresenta una conica circoscritta al triangolo fondamentale. Denomineremo questa conica: *conica dei nove punti corrispondente alla trasversale* (1), o semplicemente: *conica corrispondente alla trasversale* (1).

Abbiamo così il teorema:

Se nel piano di un quadrangolo completo si conduce una trasversale, ed in ciascuno dei sei lati di esso si determina il punto coniugato armonico di quello in cui il lato è incontrato dalla trasversale medesima, i sei punti così determinati giacciono in una conica, che passa anche per i tre punti d'incontro dei lati opposti del quadrangolo completo.

III.

Le quattro rette 02, 03, 12 ed 13 sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$cx-az=0, \qquad bx-ay=0, \qquad bx+ay=0, \qquad cx+az=0;$$

dunque il sistema delle coniche circoscritte al quadrangolo 0123 potrà rappresentarsi coll'equazione

$$(bx-ay)(bx+ay)+h(cx-az)(cx+az)=0,$$

ossia

$$(b^2+hc^2)x^2-a^2(y^2+hz^2)=0,$$

dove h è il parametro arbitrario. Indicando dunque con k una indeterminata, il polo della trasversale (1) rispetto ad una qualunque di queste coniche sarà determinato dalle equazioni

$$b^2x+hc^2x+kl=0,$$

$$-a^2y+km=0,$$

$$-ha^2z+kn=0,$$

da cui eliminando h e k, si ottiene

quale equazione del luogo geometrico dei poli della trasversale (1) rispetto alle coniche circoscritte al quadrangolo. Quest'equazione concorda con quella della conica dei nove punti, dunque:

Il luogo geometrico dei poli di una retta qualsivoglia rispetto al sistema delle coniche circoscritte ad un quadrangolo è la conica dei nove punti corrispondente a quella retta.

Notiamo che fra le infinite coniche circoscritte al quadrangolo, due sono tangenti alla trasversale (1), per cui il polo di questa trasversale rispetto a ciascuna di quelle due coniche è il punto di contatto rispettivo. Ma la conica dei nove punti contiene i poli della trasversale rispetto al sistema delle infinite coniche circoscritte al quadrangolo, dunque essa contiene anche quei due punti di contatto. Rammentando quindi che le coppie di punti in cui una trasversale qualunque è incontrata dalle coniche circoscritte ad un quadrangolo formano una involuzione quadratica, possiamo formulare il seguente teorema:

I punti doppi dell'involuzione che le coniche circoscritte ad un quadrangolo determinano su di una trasversale qualunque, sono i punti in cui questa è incontrata dalla conica dei nove punti ad essa corrispondente.

Importa osservare che le proprietà precedentemente dimostrate si potrebbero dedurre semplicemente dal teorema che *le polari di un punto rispetto alle infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo passano tutte per un medesimo punto.* Infatti, in virtù di questo teorema, basta considerare due sole coniche del sistema, e per semplicità si possono adoperare a quest'uopo due coppie di lati opposti del quadrangolo, per es. quelli che concorrono in A ed in B. Ora, la polare di un punto rispetto ad una coppia di rette è una retta unica ed individuata che passa pel loro punto di concorso; e reciprocamente, data nel piano una trasversale, non esiste in questa che un punto unico ed individuato il quale abbia per polare una data retta, passante pel punto di concorso anzidetto. Dunque, mentre il punto si muove sulla trasversale, le sue due polari generano due fasci projettivi, e quindi s'intersecano lungo una conica passante per i punti A e B. Questa conica passa anche per C, giacchè essa avrebbe potuto essere generata egualmente dalle due coppie di lati opposti che concorrono in B ed in C.

Consideriamo specialmente in questa conica i punti che corrispondono a quelli nei quali la trasversale è segata dai lati del quadrangolo. La retta 01 ossia $A1$ sega la trasversale in un punto Q, epperò la polare di questo punto rispetto alla coppia di rette $A1$, $A2$ coincide colla stessa $A1$. È chiaro dunque che il punto d'incontro delle due polari di Q è il conjugato armonico di Q rispetto al segmento 01: dunque la conica passa per questo punto conjugato armonico. Lo stesso evidentemente si può dire d'ogni altro segmento analogo.

Le proprietà dimostrate nel precedente articolo ed al principio di questo sono dunque una facile ed immediata conseguenza del teorema surricordato.

IV.

La conica dei nove punti incontra la trasversale (1) in due punti E ed E' pei quali passano infinite altre coniche. Sia K una qualunque di queste. Se rappresentiamo coll'equazione

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \tag{3}$$

la seconda corda comune ad essa ed alla conica dei nove punti, l'equazione di K sarà

$$l a^2 y z + m b^2 z x + n c^2 x y + (l x + m y + n z)(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0 . \tag{4}$$

È poi evidente che se la conica K dovesse essere tangente alla conica dei nove punti, basterebbe che quest'ultima fosse toccata dalla retta (3), al che si richiede che sia soddisfatta la condizione

$$a\sqrt{l\lambda} + b\sqrt{m\mu} + c\sqrt{n\nu} = 0 . \tag{5}$$

Ciò posto è noto che fra le infinite coniche K passanti pei punti fissi E ed E' sono, in generale, quattro che toccano i tre lati del triangolo 123, ossia le tre rette rappresentate dalle equazioni

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 , \qquad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0 , \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 ;$$

siccome dunque queste quattro coniche devono, per siffatta loro proprietà, potersi rappresentare con equazioni della forma:

$$L^2\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 + M^2\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right)^2 + N^2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2$$
$$- 2MN\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) - 2NL\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$$
$$- 2LM\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right) = 0 ,$$

ossia

$$\left(\frac{M-N}{a}\right)^2 x^2 + \left(\frac{N-L}{b}\right)^2 y^2 + \left(\frac{L-M}{c}\right)^2 z^2 + \text{ecc.} = 0 , \tag{6}$$

così le L, M, N, λ, μ, ν potranno sempre determinarsi in modo che le due equazioni (4) e (6) risultino fra loro identiche, ciò che consegue anche dal fatto che il numero di queste quantità è uguale a quello delle condizioni cui esse devono soddisfare. Supponiamo dati effettivamente alle anzidette sei quantità i valori atti a rendere identiche

le due equazioni (4) e (6); dal confronto dei coefficienti di x^2, y^2, z^2 in queste due equazioni si otterranno allora le seguenti relazioni identiche:

$$l\lambda = \left(\frac{M-N}{a}\right)^2, \qquad m\mu = \left(\frac{N-L}{b}\right)^2, \qquad n\nu = \left(\frac{L-M}{c}\right)^2.$$

Ora in virtù di queste relazioni l'equazione (5) è soddisfatta identicamente, dunque le quattro coniche K passanti per i punti E ed E' ed inscritte nel triangolo 123 sono toccate dalla conica dei nove punti. È chiaro che lo stesso ha luogo per i tre altri sistemi di quattro coniche passanti per gli stessi punti E, E' ed inscritte nei triangoli 023, 031, 012. Dunque:

Le sedici coniche passanti per i punti comuni ad una retta arbitraria ed alla conica dei nove punti corrispondente ad essa ed inscritte nei quattro triangoli formati da sei lati del quadrangolo completo, sono tutte toccate dalla conica dei nove punti *).

V.

Le coordinate X, Y, Z del centro armonico dei quattro vertici del quadrangolo rispetto alla trasversale (1) sono date, in forza delle equazioni (b) dell'Art. I, dalle formole:

$$X \equiv a\left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right),$$

$$Y \equiv b\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right),$$

$$Z \equiv c\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right),$$

dove h_0, h_1, h_2, h_3 sono i valori che riceve il trinomio $lx + my + nz$ per la sostituzione delle coordinate dei punti 0, 1, 2, 3. Ponendo

$$H = h_1 h_2 h_3 + h_0(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2),$$

si possono alle formole precedenti sostituire queste altre:

$$X \equiv a[H - 2h_0(h_0 - 2mb)(h_0 - 2nc)],$$

$$Y \equiv b[H - 2h_0(h_0 - 2nc)(h_0 - 2la)],$$

$$Z \equiv c[H - 2h_0(h_0 - 2la)(h_0 - 2mb)].$$

---

*) È questo il teorema che, per il caso particolare del quadrangolo ortogonale e della trasversale a distanza infinita, era stato dato da FEUERBACH prima che da STEINER.

Ora si trova facilmente

$$H = -2h_0^3 + 8h_0(mb.nc + nc.la + la.mb) - 8la.mb.nc;$$

dunque sostituendo si ha anche:

$$X \equiv 4la^2\,[h_0(h_0 - 2la) - 2mb.nc],$$

$$Y \equiv 4mb^2[h_0(h_0 - 2mb) - 2nc.la],$$

$$Z \equiv 4nc^2\,[h_0(h_0 - 2nc) - 2la.mb],$$

ossia

$$X \equiv la^2\,(-l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2),$$

$$Y \equiv mb^2\,(\;l^2a^2 - m^2b^2 + n^2c^2),$$

$$Z \equiv nc^2\,(\;l^2a^2 + m^2b^2 - n^2c^2).$$

Se ora indichiamo con X', Y', Z' le coordinate del polo della trasversale (1) rispetto alla conica dei nove punti, abbiamo le equazioni

$$\frac{Y'}{mb^2} + \frac{Z'}{nc^2} \equiv l^2a^2, \qquad \frac{Z'}{nc^2} + \frac{X'}{la^2} \equiv m^2b^2, \qquad \frac{X'}{la^2} + \frac{Y'}{mb^2} \equiv n^2c^2,$$

da cui si cava

$$X' \equiv la^2\,(-l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2),$$

$$Y' \equiv mb^2(\;l^2a^2 - m^2b^2 + n^2c^2),$$

$$Z' \equiv nc^2\,(\;l^2a^2 + m^2b^2 - n^2c^2).$$

L'identità di queste formole colle precedenti ci porge il seguente teorema:

Il polo di una retta del piano rispetto alla conica che ad essa corrisponde è il centro armonico dei quattro vertici del quadrangolo rispetto alla trasversale medesima.

VI.

Supponiamo che la trasversale (1) sia la retta a distanza infinita: cioè poniamo

$$l : m : n = \text{sen}\,A : \text{sen}\,B : \text{sen}\,C.$$

In questo caso la conica dei nove punti risulterà rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^2\,\text{sen}\,A}{x} + \frac{b^2\,\text{sen}\,B}{y} + \frac{c^2\,\text{sen}\,C}{z} = 0; \tag{7}$$

inoltre i sei punti armonici esistenti nei sei segmenti diverranno i rispettivi loro punti di mezzo; il polo della trasversale rispetto a qualunque conica del piano diverrà il centro di questa, e finalmente le sedici coniche di cui si è parlato nell'Art. IV, avendo in comune colla conica dei nove punti due punti situati a distanza infinita, diventeranno simili e similmente poste rispetto ad essa. Quindi le proprietà precedentemente dimostrate si modificheranno in corrispondenza e daranno luogo all'ultimo dei teoremi riportati dal sig. TRUDI alla pag. 32 del citato Giornale di Napoli (volume I).

Se inoltre si supporrà $a = b = c$, il quadrangolo diventerà ortogonale, perchè i suoi vertici saranno i centri delle quattro circonferenze inscritte nel triangolo fondamentale. L'equazione (7) assumerà allora la forma:

$$\frac{\text{sen}\, A}{x} + \frac{\text{sen}\, B}{y} + \frac{\text{sen}\, C}{z} = 0\,,$$

ossia rappresenterà la circonferenza circoscritta al triangolo fondamentale: e siccome i punti comuni ad essa ed alla trasversale saranno i due punti circolari all'infinito, che apparterranno pure alle sedici coniche inscritte, così queste si trasformeranno in altrettante circonferenze, e si avranno per tal guisa i teoremi relativi al circolo dei nove punti, teoremi che ci dispensiamo dal trascrivere qui.

Dal teorema dimostrato nell'articolo precedente, nelle ipotesi fatte or ora sui valori di l, m, n, a, b, c si deducono, come corollarj, questi altri:

Il centro della conica luogo dei centri di tutte le coniche circoscritte ad un quadrangolo è il centro di gravità dei vertici di questo.

Il centro del circolo circoscritto ad un triangolo è il centro di gravità dei quattro centri dei circoli inscritti nel medesimo triangolo.

Se si supponesse $a = b = c$ senza supporre in pari tempo

$$l : m : n = \text{sen}\, A : \text{sen}\, B : \text{sen}\, C\,,$$

si avrebbero dei teoremi relativi al quadrangolo completo ortogonale, più generali di quelli enunciati dal sig. TRUDI nel luogo citato.

Si può anche osservare che, lasciando arbitrario il quadrangolo, cioè lasciando indeterminati i rapporti $a : b : c$, si possono sempre determinare i rapporti $l : m : n$ in modo che si abbia

$$l a^2 : m b^2 : n c^2 = \text{sen}\, A : \text{sen}\, B : \text{sen}\, C\,,$$

il che è quanto dire che, *qualunque sia il quadrangolo completo che si considera, esiste sempre una retta i cui poli rispetto alle infinite coniche circoscritte al quadrangolo stesso stanno nella circonferenza circoscritta al triangolo determinato dai punti di concorso delle tre coppie di lati opposti.* Per costruire questa retta, la quale è rappresentata dall'e-

quazione

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a^2}x+\frac{\operatorname{sen} B}{b^2}y+\frac{\operatorname{sen} C}{c^2}z=0,$$

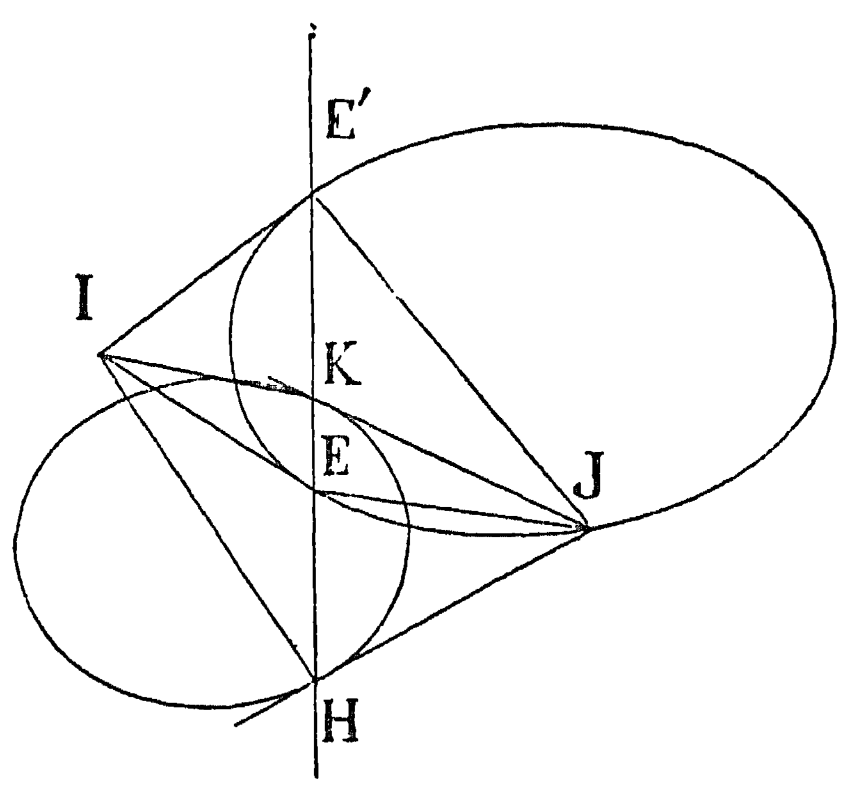
si dividano esternamente i lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale nei punti A', B', C' rispettivamente, in modo che

$$BA':A'C=-c^2:b^2,\qquad CB':B'A=-a^2:c^2,\qquad AC':C'B=-b^2:a^2.$$

I punti A', B', C' così determinati risultano, pel teorema di CEVA, situati in linea retta, e si dimostra facilmente che questa linea retta è precisamente quella rappresentata dall'equazione precedente.

Il secondo teorema dimostrato nell'Art. III dà luogo esso pure ad interessanti corollarii.

Indichiamo con E, E' i punti in cui la conica dei nove punti incontra la trasversale, e con H, K quelli in cui questa medesima retta è incontrata da una qualunque delle coniche circoscritte al quadrangolo. Per il teorema invocato, i punti E ed E' sono conjugati armonicamente coi punti H e K, per cui la retta polare di H rispetto alla conica dei nove punti passa per K e la retta polare di K passa per H. Denominiamo I il punto d'incontro di queste due rette polari e quindi anche delle tangenti a questa conica in E ed E'. Il triangolo IHK è conjugato a sè medesimo rispetto alla conica dei nove punti. Conduciamo inoltre le due tangenti in H e K alla conica circoscritta al quadrangolo e denominiamo J il loro punto d'incontro (che giace nella conica dei nove punti, per essere il polo della trasversale rispetto alla stessa conica circoscritta).



Ciò posto trasportiamo la trasversale a distanza infinita. Il punto I diventerà il centro della conica dei nove punti, e le due rette IH, IK diventeranno due diametri conjugati della medesima. Così il punto J diventerà il centro della conica circoscritta, e le rette JH, JK, tangenti ad essa nei due punti ch'essa ha a distanza infinita, di-

venteranno i suoi assintoti. Per la proprietà dunque che hanno i punti H e K della trasversale di appartenere, l'uno alle rette IH e JH, l'altro alle rette IK e JK, è resa manifesta la verità del seguente teorema:

Gli assintoti d'ogni conica circoscritta ad un quadrangolo sono paralleli a due diametri conjugati della conica luogo dei centri di tutte le coniche circoscritte al quadrangolo stesso.

Ma ha luogo anche un'altra proprietà che è come la reciproca della precedente.

Conduciamo infatti le rette JE e JE', che risultano conjugate armoniche rispetto alle JH, JK. Quando la trasversale passa a distanza infinita, queste due nuove rette, essendo conjugate armonicamente coi due assintoti della conica circoscritta, diventano due suoi diametri conjugati. Ora, essendo i punti E, E' quelli in cui la conica dei nove punti è toccata dalle tangenti condotte ad essa dal punto I, queste due tangenti, quando la trasversale passa all'infinito, diventano i suoi assintoti, epperò le rette JE, JE' diventano allora parallele a questi assintoti medesimi; dunque: *le due rette condotte dal centro di ciascuna delle coniche circoscritte ad un quadrangolo parallelamente agli assintoti della conica luogo dei centri di tutte le coniche analoghe, sono due diametri conjugati della conica circoscritta.*

Ossia, in altre parole:

Ciascuna delle coniche circoscritte ad un quadrangolo ha una coppia di diametri conjugati paralleli agli assintoti della conica luogo dei loro centri.

VII.

Dalle cose esposte precedentemente risulta che, dato in un piano un quadrangolo completo, ogni altra retta del piano stesso dà luogo ad una corrispondente conica, circoscritta al triangolo formato dai punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti del quadrangolo; e, reciprocamente, che ogni conica circoscritta a questo triangolo può considerarsi come corrispondente ad una retta unica ed individuata del piano. Le equazioni (1) e (2) insegnano a trovare l'equazione della conica quando è data quella della retta, o l'equazione della retta quando è data quella della conica.

Inoltre è facile dimostrare che quando una retta gira intorno ad un punto fisso, anche le coniche corrispondenti passano tutte per un medesimo altro punto fisso. Infatti, se la trasversale (1) va girando intorno al punto (α, β, γ), le quantità l, m, n varieranno continuamente rendendo sempre identica l'equazione

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 .$$

Ora quest'identità può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{l a^2}{\frac{a^2}{\alpha}} + \frac{m b^2}{\frac{b^2}{\beta}} + \frac{n c^2}{\frac{c^2}{\gamma}} = 0 \,,$$

e questa, paragonata coll'equazione (2), mostra appunto che le coniche corrispondenti passano tutte per il punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$. D'altronde, avendo queste coniche già in comune tre punti, non possono avere altre intersezioni. Nello stesso modo si dimostra che quando più coniche circoscritte al triangolo fondamentale hanno tutte in comune un quarto punto (α, β, γ), anche le rette corrispondenti passano tutte per un medesimo punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$.

Abbiamo qui dunque una correlazione di punti la quale procede con questa legge, che ad ogni punto del piano corrisponde un altro punto unico ed individuato del piano stesso, e ad ogni retta corrisponde una unica ed individuata conica circoscritta ad un triangolo invariabile di forma e di posizione, e reciprocamente. Questa correlazione rientra in quella più generale che venne già discussa da parecchi geometri, in particolare da STEINER *), da MAGNUS **) e più recentemente dal chiar.^{mo} sig. prof. SCHIAPARELLI ***). Noi qui ne ricercheremo direttamente le principali proprietà.

Rappresentando con α, β, γ; α', β', γ' le coordinate di due punti corrispondenti, le formole per la trasformazione sono le seguenti semplicissime:

$$(7) \qquad \alpha\alpha' : \beta\beta' : \gamma\gamma' = a^2 : b^2 : c^2 ,$$

e la retta congiungente i due punti anzidetti è rappresentata dall'equazione

$$(8) \qquad \alpha(b^2\gamma^2 - c^2\beta^2)x + \beta(c^2\alpha^2 - a^2\gamma^2)y + \gamma(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2)z = 0.$$

Dalle equazioni (7) si deduce innanzi tutto che *i soli punti del piano che corrispondano a sè medesimi sono i quattro vertici del quadrangolo dato.* Per questo motivo questi quattro punti potranno anche denominarsi *punti doppi* della trasformazione.

In ogni linea retta non può esistere più d'una coppia di punti corrispondenti (reali od immaginarj). Essi infatti, dovendo giacere tanto nella retta quanto nella conica ad essa corrispondente, non possono essere che quelli in cui la retta medesima è incontrata dalla conica, punti dei quali uno è il corrispondente dell'altro. Ciò posto, se la retta avesse la proprietà speciale di essere toccata dalla conica corrispondente, in

---

*) *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlino, 1832, n° 59.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, tomo VIII (1832), pag. 51.

***) Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie 2ª, tomo XXI (1864), pag. 227.

essa esisterebbero due punti corrispondenti raccolti in un solo, ossia essa conterrebbe un punto corrispondente di sè medesimo. Ma questa proprietà non appartiene che ai vertici del quadrangolo, dunque: *affinchè una retta del piano sia toccata dalla conica che le corrisponde, è necessario (e sufficiente) ch'essa passi per uno dei quattro vertici del quadrangolo, nel qual caso il contatto ha luogo in questo medesimo punto.*

Ciò risulta anche dall'osservare che la condizione per tale contatto si deduce dall'equazione (5) ponendo $\lambda = l$, $\mu = m$, $\nu = n$, epperò è

$$\pm al \pm bm \pm cn = 0,$$

la quale, perchè sia soddisfatta, richiede che la retta (1) passi per uno dei vertici del quadrangolo.

La tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) alla conica corrispondente alla trasversale (1) è rappresentata dall'equazione

$$\frac{la^2}{x_0^2}x + \frac{mb^2}{y_0^2}y + \frac{nc^2}{z_0^2}z = 0.$$

Se dunque supporremo che la trasversale passi per il punto (α, β, γ), e che quindi la conica corrispondente passi per il punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$, l'equazione della tangente a questa conica in quest'ultimo punto sarà

$$\frac{l\alpha^2}{a^2}x + \frac{m\beta^2}{b^2}y + \frac{n\gamma^2}{c^2}z = 0. \tag{9}$$

Se ora noi consideriamo questa retta come una nuova trasversale, è chiaro che ad essa corrisponderà una conica passante per il punto (α, β, γ), e l'equazione della tangente a questa conica in questo medesimo punto si ricaverà dalla precedente mutando $l, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ ordinatamente in $\frac{l\alpha^2}{a^2}, \frac{m\beta^2}{b^2}, \frac{n\gamma^2}{c^2}, \frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}$. Si ritorna in tal modo ad ottenere la retta

$$lx + my + nz = 0,$$

cioè la stessa trasversale primitiva. Dunque:

Se nel piano si fissa un punto (α, β, γ), e per esso si fa passare una retta qualunque, la conica corrispondente passa per il punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$, corrispondente di (α, β, γ), ed ha ivi per tangente una retta alla quale, considerata come trasversale, corrisponde una conica passante per il punto (α, β, γ) e tangente in esso alla trasversale primitiva.

È manifesto che questa seconda conica è sempre la stessa qualunque sia il qua-

drangolo i cui lati opposti si incontrano nei tre vertici del triangolo fondamentale, poichè dovendo passare per quattro punti dati, e dovendo in uno di questi toccare una retta data, essa risulta pienamente determinata. Infatti dalla (9) deducesi facilmente che la sua equazione è

$$\frac{l\alpha^2}{x}+\frac{m\beta^2}{y}+\frac{n\gamma^2}{z}=0,$$

dove non entrano punto le a, b, c.

Se si riflette che nel teorema precedente il punto (α, β, γ) può essere uno qualunque di quelli della trasversale primitiva, dal teorema stesso si deduce facilmente il seguente:

Se le infinite tangenti di una stessa conica circoscritta al triangolo fondamentale si riguardano come altrettante trasversali, ad esse corrispondono infinite coniche tutte tangenti ad una medesima retta, che è quella cui corrisponde la conica data.

Come caso particolare di questo teorema citeremo il seguente. Alla retta a distanza infinita corrisponde, come abbiamo veduto, la conica

$$\frac{a^2 \operatorname{sen} A}{x}+\frac{b^2 \operatorname{sen} B}{y}+\frac{c^2 \operatorname{sen} C}{z}=0.$$

Dunque alle infinite tangenti di questa curva corrisponderanno infinite coniche che saranno tutte toccate dalla retta a distanza infinita, ossia che saranno tutte parabole; nè è difficile dimostrare che alle rette che incontrano questa curva in due punti reali e distinti corrispondono iperboli, mentre a quelle che non la incontrano corrispondono ellissi.

I due fasci di rette formati, l'uno dalle infinite trasversali condotte per il punto (α, β, γ), l'altro dalle infinite tangenti condotte per il punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$ alle coniche corrispondenti, sono evidentemente projettivi. Dunque il luogo geometrico dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti di questi due fasci dev'essere una linea di second'ordine. Per averne l'equazione è manifesto che basterà eliminare l, m, n, fra le equazioni:

$$\frac{l\alpha^2}{a^2}x+\frac{m\beta^2}{b^2}y+\frac{n\gamma^2}{c^2}z=0,$$

$$lx+my+nz=0,$$

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

la prima delle quali è quella della tangente, la seconda quella della trasversale, mentre la terza esprime che quest'ultima retta passa costantemente pel punto (α, β, γ). Il ri-

sultato dell'eliminazione è il seguente:

$$(10)\qquad \frac{\alpha(b^2\gamma^2-c^2\beta^2)a^2}{x}+\frac{\beta(c^2\alpha^2-a^2\gamma^2)b^2}{y}+\frac{\gamma(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)c^2}{z}=0,$$

equazione che rappresenta evidentemente la conica corrispondente alla retta (8). Dunque:

Le infinite trasversali passanti per un punto fisso sono incontrate dalle tangenti condotte, nel punto corrispondente, alle coniche che loro rispettivamente corrispondono, in una serie di punti il cui luogo geometrico è la conica corrispondente alla retta che congiunge il punto fisso col suo corrispondente.

VIII.

La proprietà più importante della presente trasformazione è la seguente.

Abbiamo già rammentato che le rette polari di un medesimo punto rispetto al sistema delle infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo passano tutte per un medesimo altro punto. Ed il luogo dei poli di una retta rispetto al sistema anzidetto è una stessa cosa col luogo dei punti in cui concorrono le infinite polari dei punti della retta stessa, siccome si dimostra facilmente colle formole dell'Art. III. Ora fra le infinite coniche che si possono circoscrivere ad un quadrangolo sono da annoverarsi le tre coppie di rette che costituiscono i lati opposti del quadrangolo stesso. Dunque:

Se da un punto del piano si conducono le rette ai tre punti di concorso dei lati opposti del quadrangolo, e di queste si determinano le conjugate armoniche rispetto ai lati passanti pei rispettivi punti di concorso, le tre nuove rette così ottenute passano per un solo e medesimo punto, che è il corrispondente del primo.

Se il primo punto si muove nel piano descrivendo una retta, il punto determinato nel modo anzidetto descrive una conica circoscritta al triangolo fondamentale, e questa conica non è altro che la conica corrispondente a quella retta *).

Tutti i punti di una retta condotta per il punto di concorso di una coppia di lati opposti del quadrangolo hanno i loro corrispondenti in un'altra retta, passante per il medesimo punto e conjugata armonicamente colla prima rispetto ai due lati del quadrangolo.

Sieno ora M, M' due punti corrispondenti del piano, e conducansi le rette AM,

---

*) Da questa proprietà risulta, per es., il seguente teorema, quando il quadrangolo è ortogonale e quando la retta è a distanza infinita:

Se per i tre vertici di un triangolo si conducono tre rette parallele, indi tre nuove rette formanti colle bissettrici degli angoli del triangolo angoli rispettivamente eguali a quelli delle precedenti, queste tre ultime rette si incontrano in uno stesso punto, situato nella circonferenza circoscritta al triangolo.

AM' che li congiungono con uno dei vertici del triangolo fondamentale. Dal precedente teorema consegue che tutti i punti della retta AM hanno i loro corrispondenti sulla retta AM' e reciprocamente; esse inoltre sono conjugate armonicamente rispetto ai due lati del quadrangolo concorrenti in A, dunque:

Se uno qualunque dei vertici del triangolo fondamentale si congiunge mediante rette con un numero qualsivoglia di punti del piano, corrispondenti fra loro a due a due, si determina un fascio in involuzione. Le rette doppie di questa involuzione sono i due lati opposti del quadrangolo concorrenti in quel punto, e sono rette corrispondenti di essa quelle che passano per due punti corrispondenti.

In altre parole le rette doppie sono quelle che vanno dal vertice del triangolo ai quattro punti doppi del piano, punti che sono a due a due in linea retta col vertice medesimo.

Mediante il teorema precedente si vede facilmente quali sieno i punti corrispondenti di quei punti del piano per i quali una o due delle coordinate son nulle, ciò che non bene risulta dalle formole (7). È chiaro infatti che:

1° *A ciascun punto di uno dei lati del triangolo fondamentale corrisponde il vertice opposto,* giacchè l'angolo di due lati del triangolo è diviso armonicamente dai due lati del quadrangolo concorrenti nel suo vertice.

2° *A ciascun vertice corrisponde un punto arbitrario del lato opposto.*

Da ciò segue che ad ogni retta passante per un vertice A del triangolo fondamentale corrisponde propriamente il sistema di due rette. Una è quella che si menziona in un precedente teorema, l'altra è il lato BC, opposto al vertice A per il quale è condotta la retta. Ma siccome questa seconda retta non è che il luogo dei punti corrispondenti all'unico punto A, così se si fa astrazione da questo, si può ritenere che il luogo dei punti corrispondenti ai punti della retta sia una retta unica, determinata come s'è detto.

IX.

In virtù del teorema relativo all'involuzione delle rette condotte da un vertice del triangolo a più coppie di punti corrispondenti, diventa sommamente facile risolvere qualunque problema relativo alla trasformazione che abbiamo di mira.

Ed intorno a questa fa d'uopo osservare primieramente ch'essa può considerarsi sotto due aspetti, secondo che la si riguardi come generata geometricamente coll'ajuto del quadrangolo, o come definita analiticamente dalle equazioni (7). Tanto nell'una ipotesi quanto nell'altra essa dipende da otto costanti arbitrarie che sono, nel primo caso le coordinate dei quattro vertici del quadrangolo, nel secondo i parametri delle rette che si assumono come lati del triangolo fondamentale e i due rapporti $a^2:b^2:c^2$.

Noi prescinderemo ora dalla considerazione del quadrangolo, che abbiamo fin qui tenuta di vista, e supporremo che la trasformazione sia determinata dalla natura del triangolo fondamentale e da due punti del piano assunti come reciprocamente corrispondenti. Le coordinate di questi punti individuano infatti, per mezzo delle (7), i valori dei rapporti $a^2:b^2:c^2$. Osserveremo anzi che in tale ipotesi si ha una trasformazione più generale della prima, in questo senso che, se le a^2, b^2, c^2 risultassero avere valori negativi, la trasformazione stessa non si potrebbe ottenere da un quadrangolo reale.

Chiamiamo E, E' i due punti assunti come corrispondenti, A, B, C i tre vertici del triangolo fondamentale. Le rette AB, AC, AE, AE' determinano un'involuzione di cui si possono determinare i raggi doppi (se reali). Altrettanto dicasi delle rette BC, BA, BE, BE'. Le quattro intersezioni di questi raggi doppi saranno i quattro vertici del quadrangolo generatore della trasformazione.

La condizione che deve aver luogo affinchè il detto quadrangolo sia intieramente reale è che tutti e tre i lati del triangolo fondamentale, prolungati se occorre, incontrino la retta EE' nel tratto compreso fra E ed E', o che nessuno di essi la incontri nel detto tratto. Negli altri casi, delle tre involuzioni una sola ha i raggi doppi reali, mentre le altre due li hanno immaginari. Perciò il quadrangolo generatore ha sempre almeno due lati (opposti) reali: ma i suoi vertici o son tutti reali o son tutti immaginari. Tutto ciò è una facile conseguenza dei noti criteri relativi alla reciproca disposizione delle coppie di raggi corrispondenti nei fasci in involuzione.

Supponiamo ora dato nel piano un punto F. Il suo corrispondente F' sarà pienamente individuato. Per trovarlo si conducano le rette AF, BF e si determini il punto d'incontro della sesta retta dell'involuzione AB, AC, AE, AE', AF colla sesta retta dell'involuzione BA, BC, BE, BE', BF. Questo punto d'incontro sarà il cercato punto F'.

Abbiansi due coppie di punti corrispondenti E ed E', F ed F'. Conduciamo le rette EF', $E'F$ che si incontrano nel punto O, e le rette EF, $E'F'$ che si incontrano nel punto O'. Otteniamo così un quadrilatero completo i cui lati sono EF', $E'F$, $O'F$, $O'F'$.

È noto che, tirando da un punto qualunque P le rette che vanno ai sei vertici di questo quadrilatero, si ottiene un fascio in involuzione, i cui raggi corrispondenti sono le tre coppie di rette PE e PE', PF e PF', PO e PO', che vanno dal punto P alle tre coppie di vertici opposti del quadrilatero. Se si fa dunque coincidere il punto P successivamente con due vertici del triangolo fondamentale, si vede chiaramente che O ed O' sono punti corrispondenti.

Da ciò segue che dei sei vertici del quadrilatero completo in discorso, tre situati in linea retta hanno per corrispondenti i tre rimanenti. Ma i tre primi, appunto per

essere in linea retta, devono avere i loro corrispondenti in una conica circoscritta al triangolo fondamentale; dunque:

Date due coppie di punti corrispondenti, congiungendo ciascuno dei punti di una coppia coi due punti dell'altra, si hanno quattro rette intersecantisi in due nuovi punti. Questi due punti sono fra di loro corrispondenti, e ciascuno dei triangoli formati da tre delle quattro rette anzidette è inscrivibile in una conica circoscritta al triangolo fondamentale, che ha per corrispondente la retta rimanente.

Supponiamo descritta la conica che passa per i tre punti E', O, F' e per i vertici del triangolo fondamentale, ossia, in altre parole, la conica corrispondente alla retta $O'EF$. Se, tenendo fissa quest'ultima retta, si farà ruotare la $O'E'F'$ intorno al punto O', i punti E', F' muteranno, del pari che i loro corrispondenti E ed F; ma le rette EF', $E'F$ passeranno costantemente per il punto O in forza del teorema pocanzi dimostrato. Così, per determinare i punti E, F corrispondenti dei punti d'intersezione E', F' della segante mobile colla conica fissa, basterà condurre, per ogni posizione della segante mobile, le rette $E'O$, $F'O$ fino ad incontrare la retta fissa nei punti cercati E ed F.

Si può anche supporre che la segante mobile $E'F'$ giri intorno al punto E', corrispondente di E. Allora, per avere il punto corrispondente di O', intersezione di essa segante mobile colla retta fissa, basterà condurre la $F'E$, che segherà la conica nel cercato punto O, e per avere il punto corrispondente di F' sua intersezione colla conica fissa, basterà condurre la $E'O$ che incontrerà la retta fissa nel cercato punto F.

Sieno E, F, G, H quattro punti in linea retta, E', F', G', H' i loro corrispondenti, situati in una conica circoscritta al triangolo fondamentale. Le quattro coppie di rette AE ed AE', AF ed AF', AG ed AG', AH ed AH', sono raggi corrispondenti di un'involuzione, e però il rapporto anarmonico delle quattro rette AE, AF, AG, AH è eguale al rapporto anarmonico delle quattro rette AE', AF', AG' AH'. Poichè dunque A è un punto della conica in cui stanno i quattro punti E', F', G', H' possiamo formulare il seguente teorema:

Il rapporto anarmonico di quattro punti situati in linea retta equivale al rapporto anarmonico dei quattro punti corrispondenti, situati nella conica che corrisponde alla retta.

Da queste varie osservazioni emerge omai chiaramente la legge di corrispondenza fra i punti di una retta e gli omologhi della conica corrispondente.

X.

Procediamo ora ad indicare le costruzioni geometriche lineari, mediante le quali si possono tracciare per punti i luoghi corrispondenti a luoghi dati nel piano.

E primieramente supponiamo che si voglia costruire la conica corrispondente alla retta che passa per due punti dati, E ed E', fra loro reciprocamente corrispondenti.

Il teorema dimostrato alla fine dell'Art. VII si può enunciare anche nel modo seguente:

Se E ed E' sono due punti reciprocamente corrispondenti, K' un punto qualunque della conica che passa per A, B, C, E ed E', la conica corrispondente alla retta $K'E$ è quella che passa per A, B, C e che tocca in E' la retta $K'E'$, e viceversa la conica corrispondente alla retta $K'E'$ è quella che passa per A, B, C e che tocca in E la retta $K'E$. Queste due coniche s'incontrano in un punto K della retta EE', il quale è il corrispondente del punto K'.

Da ciò risulta per converso che:

Dati due punti E ed E', fra loro reciprocamente corrispondenti, ed un punto qualunque K della retta che li unisce, il punto K', corrispondente di K, è l'intersezione delle due tangenti condotte in E ed E' rispettivamente alle due coniche circoscritte al quadrangolo $ABCK$ e passanti, l'una per il punto E, l'altra per il punto E'.

Ciò posto, sia ABC il triangolo fondamentale, E ed E' i due punti assunti come corrispondenti, K un punto qualunque della retta che li unisce. Sia inoltre L il punto in cui la retta EE' è incontrata dalla retta AB.

Or ecco come si costruirà il punto corrispondente di K.

Si tirino le rette AE, AE' che incontrano in N, N_1 la retta CK. Dal punto L si tirino le rette LN, LN_1 che incontrano in M, M_1 la retta BC. Finalmente si tirino le rette ME, M_1E', che s'incontrano in K'. Quest'ultimo punto è il cercato. Facendo percorrere al punto K la retta EE', il punto K' descriverà la conica corrispondente a questa retta.

Per provare l'esattezza della precedente costruzione, basta dimostrare che le rette EK', $E'K'$ sono tangenti in E, E' alle coniche descritte rispettivamente per i punti A, B, C, K, E e per i punti A, B, C, K, E'. Per tal uopo si consideri la figura $ABCKE$ come un esagono inscritto in una conica, esagono del quale due vertici sieno raccolti nel punto E. Allora L è il punto d'incontro dei due lati opposti AB, KE ed N è quello dei lati opposti CK ed AE; quindi la direzione del lato infinitamente piccolo che si suppone esistente in E deve, per il teorema di PASCAL, incontrare il lato opposto BC in un punto della retta LN. Ora M è il punto d'incontro di questa col lato BC, dunque la retta ME rappresenta la direzione del lato infinitamente piccolo anzidetto, ossia è la tangente in E alla conica passante pei cinque punti A, B, C, K, E. Analogamente si dimostra che M_1E' è la tangente alla conica $ABCKE'$.

Per costruire il punto corrispondente di un punto K' situato fuori della retta EE', si immagini tracciata la conica $ABCEE'$, e condotte le rette $K'E$, $K'E'$ che incontreranno la curva in due nuovi punti P e Q. Si tirino le rette PE', QE. La conica

circoscritta ad ABC e tangente in E' alla retta PE' è, come abbiamo dimostrato, corrispondente della retta PK', e la conica circoscritta ad ABC e tangente in E alla retta QE è del pari corrispondente della retta QK'. Dunque il punto K in cui s'intersecano queste due coniche è evidentemente il corrispondente di K'. Di quì consegue, reciprocamente, che se si circoscrivono al quadrangolo $ABCK$ due coniche, l'una passante per E, e l'altra per E', le loro rispettive tangenti in E ed E' incontreranno di nuovo la conica $ABCEE'$ in due punti Q e P tali, che le rette PE e QE' andranno ad intersecarsi nel cercato punto K', corrispondente di K.

Da ciò emerge una costruzione analoga alla precedente, benchè più complicata, per determinare il punto K'.

Sieno L, H, H_1 i punti d'incontro del lato AB colle rette EE', KE, KE'. Si tirino le rette AE, AE' che incontrano la CK in N ed N_1, poscia le HN, H_1N_1 che incontrano BC in M ed M_1 rispettivamente. Le ME, M_1E' sono le cercate direzioni delle tangenti in E ed E'. Ciò si dimostra collo stesso ragionamento di pocanzi.

Per determinare sulle due rette così ottenute i punti P e Q, si tirino le rette LM, LM_1, che incontrano CE', CE in R ed R_1 rispettivamente. Il punto Q sarà l'intersezione di ME con AR, ed il punto P quella di M_1E' con AR_1, per cui condotte le PE', QE il loro punto d'incontro K' sarà il cercato.

Infatti consideriamo, per esempio, il punto Q. Questo punto dev'essere l'intersezione della retta ME colla conica $ABCEE'$. Ora nell'esagono inscritto in questa conica ed avente cinque vertici nei punti A, B, C, E', E ed il sesto vertice in un punto della retta ME, i due lati opposti AB ed EE' s'incontrano nel punto L, gli altri due lati parimenti opposti BC ed ME si incontrano nel punto M. Dunque anche il lato CE' dev'essere incontrato dal sesto lato passante per A, di cui è incognita la direzione, nel punto R in cui esso incontra la retta LM. Ne risulta che il lato incognito è AR, ed il sesto vertice Q è il punto in cui AR sega la retta ME. Per conseguenza Q è il punto comune alla retta ME ed alla conica passante per i cinque punti A, B, C, E ed E'.

Nello stesso modo si dimostra la proprietà analoga per il punto P.

XI.

Mediante la costruzione precedente si potrà, data nel piano una curva d'ordine qualsivoglia, descrivere linearmente per punti la curva ad essa corrispondente.

È facile dimostrare che, se la prima curva è dell'ordine n, la seconda non può essere d'ordine maggiore di $2n$. Infatti sieno p, q, r i massimi gradi a cui entrano le x, y, z rispettivamente nell'equazione della curva data.

Se, dopo aver sostituito in essa $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$, al posto di x, y, z, si moltiplicherà l'equazione trasformata per $x^p y^q z^r$ è chiaro che tutti i divisori scompariranno e che il risultato sarà del grado $p+q+r-n$. Ora il massimo valore degli esponenti p, q, r è n, dunque il massimo valore di $p+q+r-n$ è $2n$.

Ma per meglio vedere da che propriamente dipenda l'ordine della curva trasformata è opportuno ricorrere alle seguenti considerazioni.

Sia Γ la curva data dell'ordine n, R una retta qualunque, Γ' la curva corrispondente di Γ, R' la conica (circoscritta al triangolo ABC) corrispondente di R.

Siccome il lato BC ha n punti comuni con Γ, a ciascuno dei quali (Art. VIII) corrisponde A; così la curva Γ' passa n volte per A. Altrettanto si dica degli altri due vertici del triangolo fondamentale.

La curva Γ è incontrata da R in n punti, ai quali corrispondono altrettanti punti comuni a Γ' ed a R'. Ma queste due ultime linee passano per ciascun vertice del triangolo fondamentale l'una n volte, l'altra una volta, dunque i vertici di questo triangolo tengono luogo di $3n$ intersezioni di Γ' con R'. Dunque il numero totale delle intersezioni di queste due ultime linee è $3n+n=4n$, ed essendo R' di 2° ordine, Γ' sarà dell'ordine $2n$.

Supponiamo che la data curva Γ passi α volte per A, β volte per B, γ volte per C. Allora la curva Γ' si decomporrà in α rette coincidenti in BC, β rette coincidenti in CA, γ rette coincidenti in AB, ed una curva dell'ordine $2n-(\alpha+\beta+\gamma)$. Il lato BC incontra la curva Γ in $n-(\beta+\gamma)$ punti, se si fa astrazione dai punti multipli B e C, ed a questi $n-(\beta+\gamma)$ punti corrisponde il punto A, come punto multiplo dell'ordine $n-(\beta+\gamma)$ per la curva Γ'. Dunque questa passa $n-(\beta+\gamma)$ volte per A, $n-(\gamma+\alpha)$ volte per B, $n-(\alpha+\beta)$ volte per C.

L'ultimo teorema dell'Art. VII può enunciarsi così:

Data una retta R ed in essa un punto p, per avere la tangente alla conica corrispondente R' nel punto corrispondente p', basta trovare il secondo punto d'intersezione q della retta R colla conica corrispondente alla retta pp'. La retta qp' è la tangente cercata.

Se il punto p è quello in cui la retta R incontra uno dei lati del triangolo fondamentale, per es. BC, il punto p' diventa il vertice A opposto a questo lato, e la conica corrispondente alla retta pp' è surrogata evidentemente dalla retta conjugata armonica di pp' rispetto ai lati del quadrangolo generatore concorrenti in A. Questa conjugata armonica è dunque la tangente nel vertice A alla conica R'. Se p fosse un punto della curva Γ ed R la tangente a questa in quel punto, è chiaro che la retta determinata nel modo ora detto sarebbe tangente in A ad uno dei rami della curva Γ'. Ora il lato BC ha n punti comuni colla curva Γ, che indicheremo con $i_1, i_2, \ldots i_n$: dunque le n rette conjugate colle $Ai_1, Ai_2, \ldots Ai_n$ saranno le tangenti agli n rami

della curva corrispondente Γ'. Ne risulta che se il lato BC avesse α punti contigui in comune con Γ, la corrispondente curva Γ' avrebbe α tangenti riunite nel punto A. Per esempio, se Γ fosse del 2° ordine e toccasse BC, la corrispondente curva del 4° ordine avrebbe una cuspide in A; e ne avrebbe una in ciascun vertice, se la conica Γ fosse inscritta nel triangolo fondamentale.

Volendo determinare una curva dell'ordine n che abbia per trasformata una dell'ordine m (m non può essere minore di $\frac{1}{2}n$, perchè la curva corrispondente ad una dell'ordine m non può essere d'ordine maggiore di $2m$), basterà, per quanto si è pocanzi dimostrato, fare in modo che $2n - m$ punti della prima cadano nei tre vertici del triangolo fondamentale. Così, per esempio:

1° Ad una conica corrisponderà:

una retta, se la prima passerà per tutti e tre i vertici (come già sappiamo);

una conica, se la prima passerà per due vertici;

una linea di terz'ordine, se la prima passerà per un solo vertice.

2° Ad una linea di terz'ordine corrisponderà:

una conica, se la prima avrà un punto doppio in un vertice e se passerà, inoltre, per gli altri due vertici;

una linea di terz'ordine, se passerà per tutti e tre i vertici, o per due soli con un punto doppio in uno di essi;

una linea del quart'ordine, se passerà per due vertici o se avrà un punto doppio in un vertice;

una linea del quint'ordine, se passerà per un solo vertice.

Ecc. Ecc.

XII.

Facciamo alcune ipotesi sugli elementi che determinano la presente trasformazione.

Supponiamo che il quadrangolo sia ortogonale. In questo caso i raggi doppi di ciascuna delle tre involuzioni formate dalle rette che vanno da ciascun vertice del triangolo fondamentale alle coppie di punti corrispondenti sono fra loro perpendicolari. Ne risulta, come è noto, che le rette condotte da un vertice del detto triangolo, per esempio da A, a due punti corrispondenti, come sarebbero E ed E', formano angoli eguali con ciascuno dei due lati del quadrangolo che concorrono in A, ossia coi due lati $A1$ e 23. Se quindi la figura cui appartiene il punto E si facesse ruotare intorno alla retta $A1$, oppure alla retta 23, finchè, dopo aver fatto un mezzo giro, essa si tornasse ad adagiare nel piano, ciascun punto della figura stessa, come E, si troverebbe in linea retta col suo corrispondente E' e col punto A, e sarebbe, nel primo

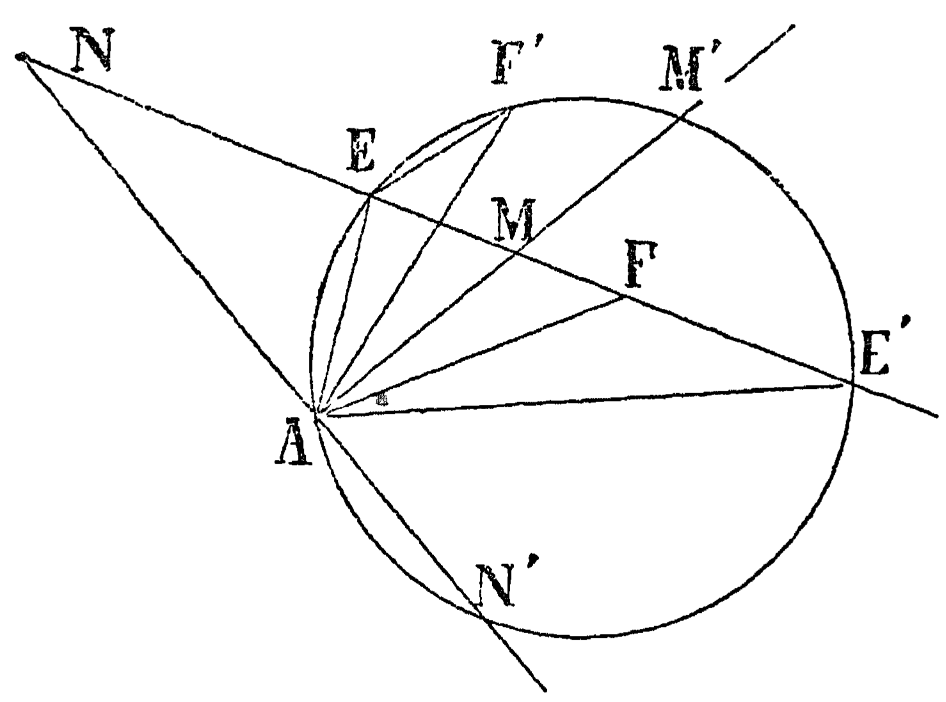
caso, dalla stessa parte del suo corrispondente rispetto al punto A, nel secondo caso, dalla parte opposta. Lo stesso dicasi dei punti B e C.

Per tal modo i sei lati del quadrangolo ortogonale hanno la proprietà che una mezza rotazione fatta intorno ad uno qualunque di essi da una figura esistente nel loro piano, la trasporta in tal posizione rispetto alla figura corrispondente, che due punti corrispondenti quali si vogliano stanno in linea retta col punto in cui il lato del quadrangolo è incontrato dal lato opposto. Essi poi si trovano dalla stessa parte rispetto a questo punto, se il lato è uno di quelli che passano nell'interno del triangolo ABC, si trovano da parti contrarie, se il lato è interamente esterno al triangolo stesso.

Supponiamo invece che il quadrangolo sia tale che due dei vertici del triangolo fondamentale, per esempio B e C, diventino i due punti circolari all'infinito.

In questo caso a qualunque retta del piano corrisponderà una circonferenza passante per il punto A.

Per determinare completamente questa trasformazione assumiamo ad arbitrio due



punti, E ed E', come corrispondenti, e tiriamo le rette AE, AE'. I due lati del quadrangolo generatore concorrenti in A, dovendo essere conjugati armonicamente rispetto ai due lati del triangolo fondamentale concorrenti nello stesso punto, saranno perpendicolari fra loro, giacchè questi due lati del triangolo vanno ai punti circolari all'infinito. D'altronde gli anzidetti due lati del quadrangolo essendo i raggi doppi dell'involuzione formata dalle rette che vanno dal punto A a tutte le coppie di punti corrispondenti, sono conjugati armonicamente con ciascuna coppia di tali rette, e quindi colle rette AE, AE' in particolare. Dunque essi non sono altro che le bissettrici AM, AN, dell'angolo EAE'. Tutti gli altri lati del quadrangolo sono immaginari, del pari che i suoi vertici.

Ciò posto, alla retta EE' corrisponderà la circonferenza passante per i tre punti A, E ed E', e per trovare il corrispondente di ogni altro punto della retta EE', per

esempio di F, basterà condurre la retta AF' egualmente inclinata quanto AF rispetto ad AM. Il punto F' in cui essa incontra la circonferenza sarà il cercato. Il punto A corrisponde, come facilmente si può vedere, al punto situato a distanza infinita sulla retta EE'. I corrispondenti dei punti in cui le bissettrici dell'angolo EAE' incontrano la retta EE' sono evidentemente quelli in cui le stesse bissettrici incontrano la circonferenza.

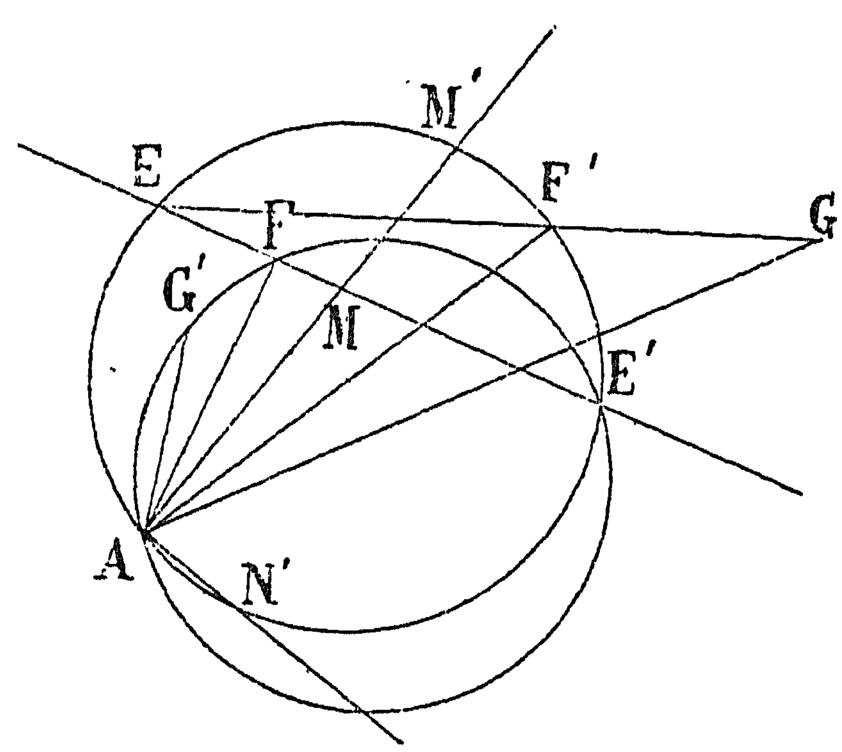
I triangoli simili AEF', AFE' dànno

$$AE:AF = AF':AE',$$

da cui

$$AF.AF' = AE.AE',$$

per cui il punto A possiede, rispetto a due punti corrispondenti della retta e della circonferenza, la medesima proprietà metrica che ha il centro d'un'involuzione rettilinea. Ma questa proprietà ha luogo per due punti corrispondenti qualsivogliano. Sia infatti G un punto qualunque del piano. Conduciamo GE e troviamo il corrispondente, F, del punto F' in cui questa retta sega la prima circonferenza. La circonferenza passante



per i punti A, F ed E' sarà la corrispondente della retta $EF'G$. Il punto corrispondente di G si determinerà quindi conducendo la retta AG, indi la retta AG' egualmente inclinata quanto AG sulla AM. Il punto G' in cui quest'ultima retta sega la seconda circonferenza sarà il cercato corrispondente di G. Ora, per il teorema precedentemente dimostrato, si avrà

$$AG.AG' = AF.AF';$$

ma si aveva già

$$AF.AF' = AE.AE',$$

dunque

$$AG.AG' = AE.AE' = \text{cost.},$$

equazione in cui G e G' sono due punti corrispondenti qualsivogliano.

Se quindi, come abbiam fatto precedentemente, faremo ruotare intorno ad una delle due rette AM, AN il piano della figura cui appartiene il punto G, finchè, compiuto un mezzo giro, esso venga di nuovo ad adagiarsi nel piano primitivo, ciascun punto della figura, come G, si troverà col suo corrispondente G' in una retta passante per il punto A, e tali due punti giaceranno dalla medesima parte di A, nel primo caso, da parti opposte, nel secondo. Inoltre le loro distanze dal punto A saranno in ambedue i casi vincolate dalla relazione

$$AG.AG' = \text{cost.}$$

Così le due figure, dopo la rotazione dell'una di esse, si troveranno in quella scambievole relazione, la quale, già usata dal chiar.^mo^ prof. BELLAVITIS e riproposta da THOMSON sotto il nome di *principio delle immagini*, è ora universalmente adoperata e chiamata col nome di *trasformazione per raggi vettori reciproci*.

VI.

ESTENSIONE ALLO SPAZIO DI TRE DIMENSIONI DEI TEOREMI RELATIVI ALLE CONICHE DEI NOVE PUNTI.

Giornale di Matematiche, volume I (1863), pp. 208-217, 354-360.

I.

La maggior parte delle proprietà che hanno luogo nel piano per il quadrangolo trovano il loro riscontro nello spazio di tre dimensioni, se si considera il sistema costituito da cinque punti disposti in modo che non più di tre fra essi si trovino in un medesimo piano. Noi indicheremo questi punti coi numeri 0, 1, 2, 3, 4. Essi non esercitano tutti il medesimo ufficio, come avviene dei quattro vertici di un quadrangolo piano: l'un d'essi, quello che abbiamo indicato con 0, serve ad un uso speciale. Noi lo denomineremo perciò *punto centrale* del sistema. Ciò premesso ecco qual'è la figura a tre dimensioni che si può riguardare come analoga al quadrangolo piano.

Si immagini il tetraedro che ha i vertici nei punti 1, 2, 3 e 4; poscia, per il punto centrale e per i sei spigoli di questo tetraedro si facciano passare altrettanti piani. Ciascuno di questi piani sega lo spigolo opposto a quello per il quale esso è condotto in un punto: indichiamo con (12) il punto d'incontro del piano condotto per lo spigolo 12 collo spigolo opposto 34, e così facciamo per gli altri punti analoghi. È evidente che, di questi sei punti, due esistenti in due spigoli opposti sono in linea retta col punto centrale.

I tre piani condotti per il punto centrale e per i tre spigoli di una medesima faccia del tetraedro, per es. per quelli della faccia 123, segano i tre spigoli opposti,

cioè quelli che fanno capo al vertice opposto 4, nei tre punti (23), (31), (12). Se per questi punti si fa passare un piano, i tre piani anzidetti determinano in esso un triangolo ABC i cui tre vertici sono evidentemente in linea retta col punto centrale e rispettivamente coi tre punti 1, 2 e 3. Le altre tre faccie 234, 341 e 412 del tetraedro primitivo dànno luogo a tre altri triangoli analoghi BCD, CDA, DAB, ed i quattro triangoli così formati, ciascuno dei quali ha, come è facile riconoscere, un lato comune con ciascuno degli altri tre, costituiscono un nuovo tetraedro $ABCD$, che diremo, per brevità, *conjugato* del primitivo rispetto al punto centrale. Così, per evitare equivoci, denomineremo: vertici *corrispondenti* di questi due tetraedri quelli che stanno a due a due in linea retta col punto centrale, come sarebbero 1 ed A, 2 e B, ecc.; spigoli *corrispondenti* e faccie *corrispondenti* quegli spigoli e quelle faccie che sono determinate da coppie o da terne di vertici corrispondenti, come per es. 12 ed AB, 123 ed ABC; denomineremo inoltre *piani centrali* quelli che passano per il punto centrale e per i sei spigoli del tetraedro primitivo o del conjugato, che è lo stesso.

In conseguenza della costruzion fatta è chiaro che:

1°) Due spigoli corrispondenti dei due tetraedri sono in un medesimo piano passante per il punto centrale, ossia in uno dei piani centrali.

2°) Ciascuno spigolo di uno dei tetraedri ha un punto comune e quindi è in un medesimo piano con quello spigolo dell'altro che è opposto allo spigolo corrispondente del primo, e che diremo *reciproco* di questo. Chiameremo *piani reciproci* quelli che passano per due spigoli reciproci e distingueremo col nome di *piani reciproci ed opposti* due piani reciproci, ciascuno dei quali passi per gli spigoli opposti a quelli contenuti nell'altro. Si hanno così tre coppie di piani reciproci ed opposti, cioè:

$$23AD \text{ ed } 14BC, \quad 31BD \text{ e } 24CA, \quad 12CD \text{ e } 34AB.$$

3°) I due tetraedri sono, rispetto al punto centrale, perfettamente reciproci l'uno dell'altro; talchè, operando sul punto centrale e sui vertici A, B, C, D del secondo tetraedro nel modo in cui si è operato sul medesimo punto e sui vertici 1, 2, 3, 4 del primo, si otterrebbe evidentemente di nuovo il tetraedro primitivo.

II.

Le proprietà della figura pocanzi costruita che interessa di conoscere per lo scopo che abbiamo di mira, sono le seguenti.

Due spigoli corrispondenti, essendo in un medesimo piano (centrale), si incontrano in un punto. Se dunque consideriamo due faccie corrispondenti, come 123 ed ABC, le tre coppie di spigoli corrispondenti che le determinano daranno luogo a tre punti d'incontro: ora questi devono necessariamente trovarsi nella retta lungo cui si

intersecano i due piani, dunque: *i tre spigoli d'una delle faccie dell'un tetraedro sono incontrati dagli spigoli corrispondenti dell'altro tetraedro in tre punti situati in linea retta.*

Siccome ciascheduno spigolo è comune a due faccie del tetraedro cui appartiene, così è manifesto che la retta d'intersezione di due faccie corrispondenti nei due tetraedri incontra tutte e tre le rette in cui esistono le intersezioni delle altre tre coppie di faccie corrispondenti. Ora, quando quattro rette sono tali che una qualunque di esse incontra le altre tre, esse sono di necessità in uno stesso piano, dunque: *le quattro rette lungo cui s'intersecano le faccie corrispondenti dei due tetraedri sono in un solo e medesimo piano.* Ossia: *i sei punti d'incontro degli spigoli corrispondenti dei due tetraedri sono in un medesimo piano.* Indicheremo per brevità questo piano col simbolo **Π**.

Consideriamo ora due piani reciproci ed opposti, come sarebbero $12\,CD$ e $34\,AB$. La retta lungo cui essi s'intersecano contiene evidentemente i due punti d'incontro degli spigoli corrispondenti 12, AB e 34, CD. Ora tutti questi punti d'incontro giacciono nel piano **Π**, dunque: *le tre rette d'intersezione dei piani reciproci ed opposti giacciono nel piano delle quattro rette d'intersezione delle faccie corrispondenti.*

I tre punti in cui si intersecano le tre rette d'intersezione dei piani reciproci ed opposti hanno la seguente importante proprietà:

Si considerino due spigoli adjacenti del primo tetraedro, p. es. 12 ed 13, ed i piani reciproci in cui sono contenuti, cioè i piani $12\,CD$ ed $13\,BD$, che s'intersecano lunga la retta $1\,D$. In questi piani esistono due coppie di vertici corrispondenti, cioè 2, B e 3, C. Siccome le rette $2\,C$ e $3\,B$ sono in un medesimo piano (centrale), così esse s'incontreranno in un punto, e siccome il loro incontro deve d'altronde avvenire nella retta d'intersezione dei due piani reciproci in cui esistono, così esse concorreranno in un punto della retta $1\,D$. Consideriamo invece i due altri piani reciproci, che contengono gli spigoli 42 e 43, e che s'intersecano lungo la retta $4\,A$. Con un ragionamento analogo a quello di pocanzi si dimostrerà che le rette $2\,C$, $3\,B$ contenute in questi due piani reciproci concorrono in un punto della retta $4\,A$. Dunque le quattro rette $1\,D$, $2\,C$, $3\,B$ e $4\,A$ concorrono in un solo e medesimo punto, che indicheremo con I. In questo punto concorrono evidentemente i quattro piani reciproci considerati; ma questi piani sono opposti a due a due, cioè $12\,CD$ a $43\,AB$ ed $13\,BD$ a $42\,AC$; dunque il punto I è uno dei punti d'incontro delle tre rette in cui si segano le tre coppie di piani reciproci ed opposti.

Analoghe proprietà si verificano per gli altri due punti, che indicheremo con II e III, ossia, riassumendo:

nel punto	I	concorrono le 4 rette		$1\,D$,	$2\,C$,	$3\,B$,	$4\,A$,
»	» II	»	»	$1\,C$,	$2\,D$,	$3\,A$,	$4\,B$,
»	» III	»	»	$1\,B$,	$2\,A$,	$3\,D$,	$4\,C$.

Dunque: *in quattro modi si possono congiungere a due a due con rette i vertici dei due tetraedri in guisa che le quattro congiungenti concorrano in un medesimo punto dello spazio, ed i quattro punti di concorso sono: il punto centrale ed i tre punti d'incontro delle rette lungo cui s'intersecano i piani reciproci ed opposti.*

Si osservi che *ciascuno dei punti* I, II, III *è contenuto in due piani centrali determinati da due spigoli opposti dell'uno o dell'altro tetraedro.* Infatti il punto I, per es., essendo l'intersezione delle rette $2C$ e $3B$, giace nel piano centrale 023, ovvero oBC, ed essendo ancora l'intersezione delle rette $1D$ e $4A$, giace nel piano centrale 014 ovvero oAD. Questi due piani si segano lungo la retta oI, che si potrebbe chiamare *retta centrale.* Questa retta passa evidentemente per il punto comune agli spigoli reciproci 23 ed AD, 14 e BC, ossia pei punti (23) ed (14).

Consideriamo nuovamente il piano II, ossia il piano dei tre punti I, II, III. In questo piano, oltre le tre rette che congiungono a due a due questi punti, esistono le quattro rette d'intersezione delle faccie corrispondenti dei due tetraedri, le quali quattro rette si possono considerare come formanti un quadrilatero completo i cui sei vertici sono le intersezioni degli spigoli corrispondenti. In questo quadrilatero completo il vertice risultante dall'intersezione dei due spigoli corrispondenti 12 ed AB è opposto a quello risultante dall'intersezione dei due spigoli pure corrispondenti 34 e CD. Infatti, il primo è situato all'intersezione di due delle rette componenti il quadrilatero, cioè di quelle lungo cui si segano le faccie corrispondenti 123 ed ABC, 124 ed ABD, mentre il secondo è situato all'intersezione delle altre due rette, cioè di quelle lungo cui si segano le faccie corrispondenti 341 ed ACD, 342 e BCD. Ne risulta che la retta congiungente i due vertici anzidetti è una diagonale del quadrilatero completo. Ora è manifesto che questa retta è la comune intersezione dei due piani reciproci ed opposti $12CD$ e $34AB$, ossia, per quanto si è testè dimostrato, è la retta che passa pei punti I e II. Dunque: *le quattro rette d'intersezione delle faccie corrispondenti dei due tetraedri formano un quadrilatero completo, le cui diagonali sono le tre rette d'intersezione dei piani reciproci ed opposti.*

Nella retta d'intersezione dei due piani reciproci ed opposti $12CD$ e $34AB$ esistono quattro punti speciali, che sono: i due punti d'incontro degli spigoli corrispondenti 12 ed AB, 34 e CD, ed i due punti I e II. Dall'essere i primi due, vertici opposti del quadrilatero completo di pocanzi, e gli ultimi due, estremi della diagonale passante per essi, risulta evidentemente che queste due coppie di punti sono conjugate armonicamente fra loro. Dunque, *se per la retta centrale* o III *si faranno passare quattro piani, due dei quali contengano i lati opposti* AB *e* CD, *e gli altri due i punti* I e II, *queste due coppie di piani saranno conjugate armonicamente fra loro.*

Il punto I si trova, abbiam detto, all'intersezione delle quattro rette

$$1D, \quad 2C, \quad 3B, \quad 4A.$$

Ora le due rette I2 *C*, I3 *B* formano, insieme colle 2 *B*, 3 *C*, un quadrilatero completo che ha per diagonali 23, *B C* e Io, l'ultima delle quali è incontrata dalle altre due nei punti d'incontro degli spigoli 23 ed *A D*, 14 e *B C*, ed è terminata ai vertici opposti o e I, dunque: *ciascuna retta centrale è divisa armonicamente nei due punti in cui essa incontra gli spigoli opposti dell'uno o dell'altro tetraedro.* Si suppone, nell'enunciato di questo teorema, che la retta centrale sia terminata al punto centrale e ad uno dei punti I, II, III.

Dalla considerazione delle altre due diagonali del quadrilatero completo di pocanzi, cioè delle rette 23 e *B C*, emerge che lo spigolo *B C* (ovvero 23) è diviso armonicamente nei due punti in cui è incontrato dallo spigolo reciproco 14 (ovvero *A D*) e dallo spigolo corrispondente 23 (ovvero *B C*). Ma quest'ultimo punto giace nel piano I II III, dunque: *se in ciascheduno spigolo di uno dei tetraedri si determina il punto conjugato armonico di quello in cui lo spigolo stesso è incontrato dal suo reciproco nell'altro tetraedro, i sei punti così ottenuti sono in un medesimo piano e coincidono coi sei punti d'incontro degli spigoli corrispondenti.* Possiamo anche enunciare questo teorema affatto indipendentemente dalla considerazione dei due tetraedri conjugati, nel modo che segue: *se per ciascheduno spigolo di un tetraedro e per un punto dato si conduce un piano, questo sega lo spigolo opposto in un punto: i conjugati armonici dei sei punti così ottenuti, rispetto agli spigoli del tetraedro, sono in un solo e medesimo piano* *).

Lungo uno spigolo qualunque di uno dei tetraedri, per es. lungo 12, si segano quattro piani, che sono: quelli delle due faccie 123 ed 124, il piano centrale 012 ed il piano reciproco 12 *C D*. Ora la retta centrale Io sega questi quattro piani ordinatamente nei punti (14), (23), o e I, dei quali i primi due sono, per quanto abbiamo dimostrato, conjugati armonicamente cogli altri due. Ne risulta che *l'angolo di due faccie d'uno dei tetraedri è diviso armonicamente dal piano centrale e dal piano reciproco passanti per lo spigolo comune a quelle due faccie.*

Ciascuno dei piani reciproci contiene due dei quattro punti 1, 2, 3, 4 e due dei tre punti I, II, III. All'incontro ciascuno dei piani centrali contiene tre dei punti o, 1, 2, 3, 4 ed uno dei punti I, II, III. Inoltre la distribuzione degli otto punti

o, 1, 2, 3, 4, I, II, III,

fra queste due specie di piani ha luogo per modo che il piano reciproco ed il piano centrale passanti per un medesimo spigolo del tetraedro *A B C D* li contengono tutti. Abbiamo così sei coppie di piani, ciascuna delle quali contiene tutti gli otto punti an-

*) HERMES, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LVI (1859), pag. 204. — Veggasi anche una nota del sig. FIEDLER nella Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. VIII (1863), pag. 51.

zidetti, e sono le seguenti:

$$\begin{array}{lcl} 23\,AD & \text{e} & 14\,AD, \\ 31\,BD & » & 24\,BD, \\ 12\,CD & » & 34\,CD, \\ 14\,BC & » & 23\,BC, \\ 24\,CA & » & 31\,CA, \\ 34\,AB & » & 12\,AB. \end{array}$$

Considerando dunque queste sei coppie di piani come superficie di 2° ordine, ricaviamo di qui che *esiste un numero doppiamente infinito di superficie del second'ordine che passano per gli otto punti* 0, 1, 2, 3, 4, I, II, III.

III.

Premettiamo all'applicazione delle precedenti considerazioni la ricerca di alcune formole.

Sieno dati due punti nello spazio le cui coordinate quadriplanari relative ad un tetraedro fondamentale $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$ sieno determinate dai rapporti

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 , \qquad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2 .$$

Abbiasi inoltre il piano qualunque

$$lx + my + nz + pw = 0 .$$

Questo piano segherà il segmento terminato ai due punti dati (che per brevità indicheremo con 1 e 2) in un punto, del quale ci occorre determinare il conjugato armonico rispetto al segmento stesso.

Per tal uopo consideriamo la retta 12 come intersezione di due piani passanti l'uno per il punto $x=y=z=0$, l'altro per il punto $x=y=w=0$, e rappresentati dalle equazioni

$$(a) \qquad \begin{cases} Lx + My + Nz = 0, \\ L'x + M'y + Nw = 0, \end{cases}$$

(dove abbiamo indicati colla stessa lettera i coefficienti di z e di w perchè facilmente si trova che il loro valor comune è $N = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$). Avremo le identità

$$(b) \qquad \begin{cases} L\alpha_1 + M\beta_1 + N\gamma_1 = 0, & L'\alpha_1 + M'\beta_1 + N\delta_1 = 0, \\ L\alpha_2 + M\beta_2 + N\gamma_2 = 0, & L'\alpha_2 + M'\beta_2 + N\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Eliminando le z, w dall'equazione del piano col mezzo delle (a), si trova

$$(c) \qquad (Nl - Ln - L'p)x + (Nm - Mn - M'p)y = 0,$$

equazione del piano passante per lo spigolo $x = y = 0$ del tetraedro, e pel punto in cui il piano incontra il segmento 12.

Ora i piani passanti per lo stesso spigolo e per i punti 1 e 2 sono

$$\beta_1 x - \alpha_1 y = 0, \qquad \beta_2 x - \alpha_2 y = 0,$$

bisogna adunque trovare il piano conjugato armonico del piano (c) rispetto a questi due. Per far ciò poniamo

$$\beta_1 x - \alpha_1 y = u, \qquad \beta_2 x - \alpha_2 y = v,$$

da cui

$$Nx = \alpha_1 v - \alpha_2 u, \qquad Ny = \beta_1 v - \beta_2 u.$$

Sostituendo nella (c) si ha

$$(Nl - Ln - L'p)(\alpha_1 v - \alpha_2 u) + (Nm - Mn - M'p)(\beta_1 v - \beta_2 u) = 0.$$

Il piano conjugato armonico di quello rappresentato da quest'equazione rispetto agli $u = 0$, $v = 0$ è

$$(Nl - Ln - L'p)(\alpha_1 v + \alpha_2 u) + (Nm - Mn - M'p)(\beta_1 v + \beta_2 u) = 0,$$

ossia, per le identità (b),

$$(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 + p\delta_1)v + (l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2 + p\delta_2)u = 0.$$

Riponendo per u, v i loro valori, e ponendo inoltre, per brevità,

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 + p\delta_1 = h_1,$$

$$l\alpha_2 + m\beta_2 + n\gamma_2 + p\delta_2 = h_2,$$

si ha

$$h_1(\beta_2 x - \alpha_2 y) + h_2(\beta_1 x - \alpha_1 y) = 0,$$

ossia finalmente

$$(h_1\beta_2 + h_2\beta_1)x - (h_1\alpha_2 + h_2\alpha_1)y = 0.$$

È questa l'equazione del piano passante per lo spigolo xy e per il punto armonico cercato. Le equazioni dei piani condotti per lo stesso punto e per gli spigoli

xz, xw sarebbero, per ragione di simmetria,

$$(h_1\gamma_2 + h_2\gamma_1)x - (h_1\alpha_2 + h_2\alpha_1)z = 0\,,$$

$$(h_1\delta_2 + h_2\delta_1)x - (h_1\alpha_2 + h_2\alpha_1)w = 0\,,$$

epperò le coordinate del punto d'intersezione di questi tre piani, ossia del punto cercato, saranno date dalle formole

$$(1)\qquad \frac{x}{h_1\alpha_2 + h_2\alpha_1} = \frac{y}{h_1\beta_2 + h_2\beta_1} = \frac{z}{h_1\gamma_2 + h_2\gamma_1} = \frac{w}{h_1\delta_2 + h_2\delta_1}$$

od anche

$$x : y : z : w = \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} : \frac{\beta_1}{h_1} + \frac{\beta_2}{h_2} : \frac{\gamma_1}{h_1} + \frac{\gamma_2}{h_2} : \frac{\delta_1}{h_1} + \frac{\delta_2}{h_2}\,.$$

Ci sia qui permessa una breve digressione.

Supponiamo di avere nello spazio m punti, disposti in modo qualunque, ed indichiamo con $\alpha_i : \beta_i : \gamma_i : \delta_i (i = 1, 2, \ldots m)$ le coordinate dell'i-esimo di tali punti. Poscia consideriamo un punto O le cui coordinate X, Y, Z, W sieno funzioni delle coordinate degli m punti del sistema, e due altri punti, O_r ed O_{m-r}, le cui coordinate X_r, Y_r, Z_r, W_r ed X_{m-r}, Y_{m-r}, Z_{m-r}, W_{m-r} sieno rispettivamente formate colle coordinate dei primi r punti, e degli ultimi $m-r$ punti del sistema, nello stesso modo in cui quelle del punto O sono formate colle coordinate di tutti gli m punti. Supponiamo finalmente che, per la natura delle funzioni X, X_r ed X_{m-r}; Y, Y_r ed Y_{m-r}; ecc., si abbia, per ogni valore di r,

$$X = X_r + X_{m-r}\,,\quad Y = Y_r + Y_{m-r}\,,\quad Z = Z_r + Z_{m-r}\,,\quad W = W_r + W_{m-r}\,.$$

Ciò posto, cerchiamo le equazioni della retta che congiunge i due punti O_r ed O_{m-r}. Sia

$$Lx + My + Nz = 0$$

l'equazione del piano passante per questa retta e per il punto $x = y = z = 0$; avremo

$$LX_r + MY_r + NZ_r = 0\,,\qquad LX_{m-r} + MY_{m-r} + NZ_{m-r} = 0\,,$$

da cui, sommando, ed avendo riguardo alle ipotesi ammesse,

$$LX + MY + NZ = 0\,.$$

Quest'ultima equazione mostra che il piano in discorso contiene il punto O, e siccome la stessa proprietà si verificherebbe se il piano passasse per un altro vertice del tetraedro, così è chiaro che la retta $O_r\, O_{m-r}$ passa pel punto O. Questa conclusione ha luogo

evidentemente non solo qualunque sia r, ma ancora qualunque sia il modo in cui gli m punti sono distribuiti nei due gruppi considerati.

Poniamo, per es.,

$$l\alpha_i + m\beta_i + n\gamma_i + p\delta_i = h_i$$

ed

$$X = \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \dots + \frac{\alpha_m}{h_m},$$

$$Y = \frac{\beta_1}{h_1} + \frac{\beta_2}{h_2} + \dots + \frac{\beta_m}{h_m},$$

$$Z = \frac{\gamma_1}{h_1} + \frac{\gamma_2}{h_2} + \dots + \frac{\gamma_m}{h_m},$$

$$W = \frac{\delta_1}{h_1} + \frac{\delta_2}{h_2} + \dots + \frac{\delta_m}{h_m}.$$

È evidente che le funzioni qui scelte per X, Y, Z, W soddisfano alla condizione prescritta. Il punto poi che viene da esse individuato concorda con quel che dicesi *centro armonico* del sistema considerato, rispetto al piano

$$lx + my + nz + pw = 0.$$

Quando $n = 2$ esse non differiscono da quelle trovate sopra (1). Quando $n = 3$ esse dànno le coordinate del centro armonico dei tre vertici di un triangolo rispetto ad un piano, ossia del punto in cui s'intersecano le tre rette condotte dai vertici di un triangolo ai punti conjugati armonici di quelli in cui i lati opposti vengono segati dal piano. Quando $n = 4$ esse dànno le coordinate del centro armonico dei quattro vertici di un tetraedro rispetto ad un piano, ossia del punto in cui s'intersecano le quattro rette che vanno dai vertici di un tetraedro ai centri armonici delle faccie opposte rispetto al piano, e nel quale s'intersecano parimenti le tre rette che congiungono i centri armonici di due spigoli opposti, relativi al piano stesso. Ecc. Ecc. Se il piano si trasporta a distanza infinita, si ottengono le formole per il centro di gravità di un sistema di punti.

IV.

Ritorniamo ai due tetraedri considerati da principio, ed assumiamo il secondo di essi come tetraedro fondamentale, per riferire ad esso tutti i punti dello spazio; nel che riterremo che le faccie BCD, CDA, DAB, ABC di esso, sieno rappresentate dalle equazioni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$.

Se si indicano con $a : b : c : d$ le coordinate del punto centrale o, quelle degli altri

sette punti risultano pienamente determinate. Infatti il punto 1, per es., è nella retta oA, rappresentata dalle equazioni $\frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{w}{d}$: d'altra parte esso si trova anche nel piano $12CD$, coniugato armonico di oCD, rappresentato dall'equazione $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, dunque le sue coordinate sono $-a : b : c : d$. Analogamente trovansi quelle degli altri punti 2, 3, 4. Quanto ai punti I, II, III, basta osservare che I, per es., si trova all'intersezione dei piani $12CD$, $13BD$ e $23BC$, le cui equazioni sono rispettivamente

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{w}{d} = 0,$$

per cui le sue coordinate sono $-a : b : c : -d$. Ed analogamente per gli altri.

Per tal guisa gli otto punti 0, 1, 2, 3, 4, I, II, III hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{array}{lrrrr}
(0) & a: & b: & c: & d, \\
(1) & -a: & b: & c: & d, \\
(2) & a: & -b: & c: & d, \\
(3) & a: & b: & -c: & d, \\
(4) & a: & b: & c: & -d, \\
(I) & -a: & b: & c: & -d, \\
(II) & -a: & b: & -c: & d, \\
(III) & -a: & -b: & c: & d.
\end{array}$$

Il piano che passa per i punti I, II, III facilmente si trova essere rappresentato dalla equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{w}{d} = 0.$$

Congiungendo a due a due mediante rette gli otto punti 0, 1, 2, 3, 4, I, II, III si ottengono 28 segmenti. Segandoli tutti con un piano

$$(2) \qquad lx + my + nz + pw = 0$$

si ottiene, in ogni segmento, un punto d'intersezione, del quale si può trovare il coniugato armonico rispetto al segmento stesso. Consideriamo per es. il segmento 01. Paragonando i dati attuali con quelli delle formole (1) e ponendo, per brevità,

$$la + mb + nc + pd = h,$$

si trova

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 = a : b : c : d, \qquad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 : \delta_2 = - a : b : \iota$$

$$h_1 = h, \qquad h_2 = h - 2la.$$

Per ciò le coordinate del punto armonico sono

$$\begin{aligned} k x_{01} &= - 2 l a^2, \\ k y_{01} &= 2(h - la) b, \\ k z_{01} &= 2(h - la) c, \\ k w_{01} &= 2(h - la) d, \end{aligned}$$

ossia

$$x_{01} : y_{01} : z_{01} : w_{01} = - \frac{la^2}{mb + nc + pd} : b : c : d.$$

Analogamente si otterrebbero le coordinate degli altri 27 punti, che per brevità omettiamo di trascrivere, e che si deducono per simmetria da quelle dei punti armonici esistenti nei segmenti 01, 12, 0I, 1I, III. Tutte queste coordinate soddisfanno alla equazione

$$(3) \qquad \frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} + \frac{pd^2}{w} = 0,$$

che rappresenta un luogo geometrico passante per tutti i 28 punti anzidetti, e che appartiene evidentemente ad una superficie di terz'ordine che contiene intieramente i sei spigoli del tetraedro fondamentale.

Questa superficie fu già considerata da CAYLEY *), il quale ha dimostrato che i piani tangenti ad essa lungo due spigoli opposti del tetraedro si segano a due a due in tre rette giacenti in un medesimo piano, e giacenti anco intieramente nella superficie.

Infatti, rappresentando con X, Y, Z, W le coordinate del piano tangente nel punto x, y, z, w, si ha, per questo piano tangente, l'equazione

$$(mb^2 zw + nc^2 wy + pd^2 yz) X + (la^2 zw + nc^2 wx + pd^2 xz) Y$$
$$+ (la^2 yw + mb^2 wx + pd^2 xy) Z + (la^2 yz + mb^2 zx + nc^2 xy) W = 0.$$

Quindi, i due piani tangenti alla superficie lungo gli spigoli $x = y = 0$, $z = w = 0$,

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), pag. 285.

sono rispettivamente rappresentati dalle equazioni

$$\frac{X}{la^2}+\frac{Y}{mb^2}=0, \qquad \frac{Z}{nc^2}+\frac{W}{pd^2}=0,$$

ossia dalle

$$\frac{la^2}{X}+\frac{mb^2}{Y}=0, \qquad \frac{nc^2}{Z}+\frac{pd^2}{W}=0.$$

Sotto la prima forma, queste due equazioni manifestano che le tre rette d'intersezione delle tre coppie di piani tangenti giacciono nel piano

$$\frac{X}{la^2}+\frac{Y}{mb^2}+\frac{Z}{nc^2}+\frac{W}{pd^2}=0;$$

sotto la seconda, che le medesime tre rette giacciono intieramente nella superficie rappresentata dall'equazione (3).

Si noti che questa superficie, avendo quattro punti doppi (i quattro vertici del tetraedro) non può contenere più di nove rette distinte, poichè ogni retta passante per due punti dóppi conta per quattro. Dunque i sei spigoli del tetraedro e le tre rette pocanzi accennate formano il completo sistema delle rette esistenti nella superficie.

Nell'ipotesi che le coordinate quadriplanari, di cui abbiamo fatto uso, esprimano distanze perpendicolari dalle faccie del tetraedro $ABCD$, è chiaro che, nell'ipotesi

$$a=b=c=d,$$

i punti 0, 1, 2, 3, 4, I, II, III diventano i centri delle sfere inscritte nel tetraedro medesimo; in questo caso abbiamo dunque il seguente teorema:

I punti di mezzo dei ventotto segmenti determinati dai centri delle otto sfere inscritte in un tetraedro qualunque, giacciono in una superficie di terz'ordine che contiene intieramente i sei spigoli del tetraedro stesso.

V.

Abbiamo veduto al § II esservi sei coppie di piani contenenti tutti gli otto punti 0, 1, 2, 3, 4, I, II e III. Scegliamo fra esse le seguenti:

$$12CD \quad \text{e} \quad 34CD,$$

$$13DB \quad » \quad 42DB,$$

$$14BC \quad » \quad 23BC,$$

cioè le tre coppie di piani rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\,,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\,,\qquad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\,,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{w}{d}=0\,,\qquad \frac{x}{a}-\frac{w}{d}=0\,,$$

ovverosia dalle seguenti

$$b^2x^2-a^2y^2=0\,,\qquad c^2x^2-a^2z^2=0\,,\qquad d^2x^2-a^2w^2=0\,.$$

Queste ultime equazioni si possono riguardare come appartenenti a tre superfic: 2° grado passanti per quegli otto punti, epperò l'equazione

$$(\mu b^2+\nu c^2+\pi d^2)\,x^2-(\mu y^2+\nu z^2+\pi w^2)\,a^2=0$$

rappresenterà un sistema doppiamente infinito di superficie di 2° ordine passanti per gli otto punti anzidetti, e rispetto a ciascuna delle quali il tetraedro fondamentale è conjugato a sè stesso. I poli, rispetto a questo sistema di superficie, del piano

$$lx+my+nz+pw=0\,,$$

sono determinati dalle equazioni seguenti, in cui ρ rappresenta una quantità indeterminata,

$$\begin{aligned}\mu b^2x+\nu c^2x+\pi d^2x+\rho l&=0\,,\\ -\mu a^2y\qquad\qquad\qquad +\rho m&=0\,,\\ -\nu a^2z\qquad\quad +\rho n&=0\,,\\ -\pi a^2w+\rho p&=0\,.\end{aligned}$$

Eliminando le arbitrarie μ, ν, π e ρ si ottiene

$$(3)\qquad \frac{la^2}{x}+\frac{mb^2}{y}+\frac{nc^2}{z}+\frac{pd^2}{w}=0\,,$$

equazione che rappresenta il luogo geometrico dei poli anzidetti. Quest'equazione è identica a quella trovata precedentemente per la superficie dei 28 punti. Si ha dunque, per questo riguardo, un teorema affatto analogo a quello già dimostrato per il piano.

VI.

Consideriamo la superficie di 3° ordine rappresentata dall'equazione (3).

L'equazione del piano tangente ad essa nel punto (x, y, z, w) può mettersi sotto

la forma

$$\frac{l a^2}{x^2} X + \frac{m b^2}{y^2} Y + \frac{n c^2}{z^2} Z + \frac{p d^2}{w^2} W = 0 .$$

Affinchè dunque un piano dato

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \pi W = 0$$

tocchi quella superficie, bisogna che dalle equazioni

$$\frac{l a^2}{x^2} = k^2 \lambda , \quad \frac{m b^2}{y^2} = k^2 \mu , \quad \frac{n c^2}{z^2} = k^2 \nu , \quad \frac{p d^2}{w^2} = k^2 \pi ,$$

dove k è un'indeterminata, si cavino per x, y, z, w dei valori che soddisfacciano all'equazione della superficie. Ora dalle equazioni precedenti si cava

$$\frac{l a^2}{x} = k a \sqrt{l \lambda} , \quad \frac{m b^2}{y} = k b \sqrt{m \mu} , \quad \frac{n c^2}{z} = k c \sqrt{n \nu} , \quad \frac{p d^2}{w} = k d \sqrt{p \pi} ,$$

per cui sostituendo nell'equazione della superficie si avrà l'equazione

$$a \sqrt{l \lambda} + b \sqrt{m \mu} + c \sqrt{n \nu} + d \sqrt{p \pi} = 0 \tag{4}$$

quale condizione del contatto fra la superficie stessa ed il piano. Se quindi si considera il piano rappresentato dall'equazione

$$\lambda^2 x + \mu^2 y + \nu^2 z = 0 ,$$

il quale passa per il vertice D del tetraedro, là condizione del suo contatto colla superficie sarà

$$a \lambda \sqrt{l} + b \mu \sqrt{m} + c \nu \sqrt{n} = 0 .$$

Se ora si cerca l'inviluppo del piano anzidetto nell'ipotesi che le λ, μ, ν sieno legate dall'equazione precedente, facilmente si trova ch'esso è la superficie conica di 2° ordine rappresentata dall'equazione

$$\frac{l a^2}{x} + \frac{m b^2}{y} + \frac{n c^2}{z} = 0 .$$

Dunque i quattro coni aventi il vertice nei quattro vertici A, B, C, D del tetraedro ed inviluppanti la superficie di terz'ordine

$$\frac{l a^2}{x} + \frac{m b^2}{y} + \frac{n c^2}{z} + \frac{p d^2}{w} = 0 ,$$

sono rappresentati ordinatamente dalle equazioni

$$
(5) \quad \left\{
\begin{array}{l}
* + \dfrac{m b^2}{y} + \dfrac{n c^2}{z} + \dfrac{p d^2}{w} = 0 , \\
\dfrac{l a^2}{x} + * + \dfrac{n c^2}{z} + \dfrac{p d^2}{w} = 0 , \\
\dfrac{l a^2}{x} + \dfrac{m b^2}{y} + * + \dfrac{p d^2}{w} = 0 , \\
\dfrac{l a^2}{x} + \dfrac{m b^2}{y} + \dfrac{n c^2}{z} + * = 0 .
\end{array}
\right.
$$

È evidente che ciascuno di questi quattro coni contiene i tre spigoli del tetraedro concorrenti nel vertice rispettivo. Inoltre, siccome due qualsivogliano fra essi hanno il medesimo piano tangente lungo la generatrice comune costituita dallo spigolo in cui si trovano i loro vertici, così la loro linea di intersezione, fatta astrazione da quella generatrice (che tien qui luogo di due rette sovrapposte), è una conica piana. Sottraendo l'una dall'altra le equazioni dei due primi coni, ossia di quelli che hanno i vertici in A ed in B si trova

$$\frac{l a^2}{x} - \frac{m b^2}{y} = 0 ,$$

equazione d'un piano passante per lo spigolo CD. È evidente che questo piano ha per suo conjugato armonico rispetto alle faccie $x = 0$, $y = 0$ il piano rappresentato dall'equazione

$$\frac{l a^2}{x} + \frac{m b^2}{y} = 0 ,$$

ossia, come abbiamo veduto al § IV, il piano tangente alla superficie lungo lo spigolo CD. Inoltre i piani delle sei coniche d'intersezione anzidette contengono tutti il punto che ha per coordinate

$$(6) \qquad \frac{l a^2}{x} = \frac{m b^2}{y} = \frac{n c^2}{z} = \frac{p d^2}{w} .$$

Abbiamo così il seguente teorema: *I quattro coni aventi i vertici nei vertici del tetraedro e circoscritti alla superficie di terz'ordine, sono coni di second'ordine che si segano a due a due lungo sei coniche piane. Il piano della conica d'intersezione di due coni aventi i vertici agli estremi di uno spigolo, passa per lo spigolo opposto ed è conjugato armonicamente, rispetto alle due faccie del tetraedro che si segano lungo questo spigolo, col piano tangente alla superficie lungo questo medesimo spigolo. Inoltre tutti i sei piani anzidetti passano per un solo e medesimo punto.*

Scriviamo le equazioni (5) nella forma seguente:

$$\begin{array}{l} * \quad + m b^2 z w + n c^2 w y + p d^2 y z = 0 , \\ l a^2 z w + \quad * \quad + n c^2 w x + p d^2 x z = 0 , \\ l a^2 y w + m b^2 w x + \quad * \quad + p d^2 x y = 0 , \\ l a^2 y z + m b^2 z x + n c^2 x y + \quad * \quad = 0 , \end{array}$$

e consideriamo la superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro fondamentale e rappresentata dall'equazione

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} l p a^2 d^2 y z + m p b^2 d^2 z x + n p c^2 d^2 x y \\ + m n b^2 c^2 x w + n l c^2 a^2 y w + l m a^2 b^2 z w = 0 . \end{array} \right.$$

La simultanea sussistenza di quest'equazione e della $x = 0$ definisce la conica d'intersezione di questa superficie colla faccia del tetraedro opposta al vertice A. Ma a queste due equazioni si possono surrogare le due seguenti

$$x = 0 , \qquad \frac{m b^2}{y} + \frac{n c^2}{z} + \frac{p d^2}{w} = 0 ,$$

la seconda delle quali, appartenendo ad un cono col vertice in A, deve rappresentare il cono che ha il vertice in questo punto e che sega la faccia opposta lungo la conica d'intersezione della superficie (7) col piano $x = 0$. Questo cono non è altro che il primo dei quattro considerati sopra.

Osserviamo anche che la completa intersezione di questo cono colla superficie (7) è rappresentata dalle due equazioni

$$\frac{m b^2}{y} + \frac{n c^2}{z} + \frac{p d^2}{w} = 0 ,$$

$$n p c^2 d^2 x y + p m d^2 b^2 x z + m n b^2 c^2 x w = 0 ,$$

la seconda delle quali si può scrivere così

$$x \left(\frac{y}{m b^2} + \frac{z}{n c^2} + \frac{w}{p d^2} \right) = 0 ,$$

e rappresenta il sistema dei due piani

$$x = 0 , \qquad \frac{y}{m b^2} + \frac{z}{n c^2} + \frac{w}{p d^2} = 0 ,$$

il primo dei quali è quello della faccia opposta al vertice A, il secondo è il piano tangente alla superficie di second'ordine nel punto A stesso, come facilmente si può verificare. Ora, se immaginiamo il piano

$$\frac{x}{la^2}+\frac{y}{mb^2}+\frac{z}{nc^2}+\frac{w}{pd^2}=0\,, \tag{8}$$

è manifesto ch'esso sega la faccia opposta ad A lungo la retta

$$x=0\,,\qquad \frac{y}{mb^2}+\frac{z}{nc^2}+\frac{w}{pd^2}=0\,,$$

che è l'intersezione della faccia stessa col piano tangente precedentemente considerato. Inoltre, il piano (8) è quel medesimo in cui giacciono le tre rette che la superficie contiene oltre gli spigoli del tetraedro (§ IV), ed ha anche la proprietà che rispetto ad esso il punto (6) è centro armonico dei vertici del tetraedro, ossia è il piano armonico di questo punto rispetto al tetraedro stesso. Dunque:

I quattro coni aventi i vertici nei vertici del tetraedro e circoscritti alla superficie di terz'ordine, segano le faccie opposte del tetraedro secondo quattro coniche, che stanno in una medesima superficie di second'ordine circoscritta al tetraedro stesso, ed i piani tangenti a questa superficie nei vertici del tetraedro incontrano le faccie rispettivamente opposte lungo quattro rette situate in un medesimo piano. Il centro armonico dei vertici del tetraedro rispetto a questo piano è il punto comune ai piani delle sei coniche d'intersezione dei quattro coni, considerati a due a due, ed il piano stesso è quello che contiene le tre rette della superficie diverse dagli spigoli del tetraedro.

VII.

Le precedenti considerazioni possono servir di base alla teoria di una trasformazione geometrica delle figure a tre dimensioni, analoga alla trasformazione *conica* nel piano, e di cui ci limiteremo qui ad accennare i principali caratteri.

Quando il piano

$$lx+my+nz+pw=0$$

ruota intorno ad un punto $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, le l, m, n, p variano, in modo però da render sempre identica l'equazione

$$l\alpha+m\beta+n\gamma+p\delta=0,$$

o, ciò ch'è lo stesso, la seguente

$$\frac{l a^2}{\frac{a^2}{\alpha}} + \frac{m b^2}{\frac{b^2}{\beta}} + \frac{n c^2}{\frac{c^2}{\gamma}} + \frac{p d^2}{\frac{d^2}{\delta}} = 0,$$

per cui la corrispondente superficie di 3° ordine passa costantemente pel punto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}, \frac{d^2}{\delta}\right)$, il quale è l'unico, prescindendo dagli spigoli del tetraedro, che sia comune a tutte le superficie di 3° ordine corrispondenti alle varie posizioni del piano. In tal modo ad ogni punto $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dello spazio ne corrisponde un altro $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, tale che si ha

(9) $$\alpha\alpha' : \beta\beta' : \gamma\gamma' : \delta\delta' = a^2 : b^2 : c^2 : d^2 .$$

Ad ogni piano corrisponde, come già s'è veduto, una superficie di 3° ordine circoscritta al tetraedro fondamentale, e ad ogni retta corrisponde una linea a doppia curvatura, comune intersezione di un numero infinito di tali superficie: questa linea è una linea di terz'ordine a doppia curvatura, o, come la si vuol chiamare, una cubica gobba.

Consideriamo infatti l'equazione

$$(\lambda + k\lambda')x + (\mu + k\mu')y + (\nu + k\nu')z + (\pi + k\pi')w = 0,$$

la quale, se vi si riguardino $\lambda, \mu, \nu, \pi, \lambda', \mu', \nu', \pi'$ come costanti individuate e k come una costante arbitraria, rappresenta, mediante la variazione di k, una infinità di piani passanti per una medesima retta, che si può considerare come l'intersezione dei due piani

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \pi w = 0,$$

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z + \pi' w = 0.$$

Le superficie di 3° ordine corrispondenti a questi infiniti piani, sono comprese nell'equazione

$$\frac{(\lambda + k\lambda')a^2}{x} + \frac{(\mu + k\mu')b^2}{y} + \frac{(\nu + k\nu')c^2}{z} + \frac{(\pi + k\pi')d^2}{w} = 0,$$

ed è chiaro che esse hanno tutte in comune la linea lungo cui s'intersecano le due superficie individuali

$$\frac{\lambda a^2}{x} + \frac{\mu b^2}{y} + \frac{\nu c^2}{z} + \frac{\pi d^2}{w} = 0,$$

$$\frac{\lambda' a^2}{x} + \frac{\mu' b^2}{y} + \frac{\nu' c^2}{z} + \frac{\pi' d^2}{w} = 0.$$

Ora, eliminando alternativamente w e z fra queste due equazioni si ottengono le se-

guenti due, ad esse equivalenti,

$$a^2(\lambda\pi' - \lambda'\pi)yz + b^2(\mu\pi' - \mu'\pi)zx + d^2(\nu\pi' - \nu'\pi)xy = 0,$$

$$a^2(\lambda\nu' - \lambda'\nu)yw + b^2(\mu\nu' - \mu'\nu)wx + d^2(\pi\nu' - \pi'\nu)xy = 0.$$

Queste due equazioni rappresentano due coni di second'ordine aventi in comune la generatrice $x = y = 0$. Se adunque si prescinde da questa retta, che è comune a tutte le curve che consideriamo, resta appunto una cubica gobba, la quale è la linea che deve riguardarsi come corrispondente alla retta comune a tutti i piani anzidetti. Questa cubica gobba passa per tutti i vertici del tetraedro.

Una superficie di 2° ordine circoscritta al tetraedro fondamentale, e del resto qualunque,

$$Lyz + Mzx + Nxy + Pxw + Qyw + Rzw = 0,$$

ha per corrispondente un'altra superficie di 2° ordine, parimente circoscritta a quel tetraedro e rappresentata dall'equazione

$$Lb^2c^2xw + Mc^2a^2yw + Na^2b^2zw + Pa^2d^2yz + Qb^2d^2zx + Rc^2d^2xy = 0.$$

È questa una proprietà che non ha il suo riscontro nel piano. Così, alla superficie (7) considerata nel § precedente corrisponde quella rappresentata dall'equazione

$$mnyz + nlzx + lmxy + lpxw + mpyw + npzw = 0,$$

che è indipendente dalle quantità a, b, c, d e non dipende che dalla posizione del piano

$$lx + my + nz + pw = 0.$$

È facile riconoscere che i piani tangenti a quest'ultima superficie di 2° ordine nei quattro vertici del tetraedro, incontrano le faccie opposte di questo lungo quattro rette contenute tutte in questo piano.

Bologna, maggio-luglio 1863.

VII.

SULLE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Giornale di Matematiche, Volume I (1863), pp. 123-124.

La dimostrazione che comunemente vien data dei teoremi di COTES e di MOIVRE si fonda sulla considerazione delle radici delle equazioni binomie e trinomie, radici che per la forma speciale di queste equazioni si sanno esplicitamente determinare. Ciò può indurre nella credenza che quei teoremi non abbiano i loro analoghi quando si tratti di equazioni algebriche complete, delle quali non si possano assegnare in forma esplicita le radici. Ma, se si ha riguardo all'oggimai notissima rappresentazione geometrica dei numeri complessi, è sommamente agevole stabilire per le equazioni algebriche complete di grado qualunque una proposizione generale, dalla quale scaturisce nel modo più evidente la ragione d'essere dei citati teoremi.

Tracciati in un piano due assi ortogonali Ox, Oy, rappresento la variabile complessa $z = x + iy$ per mezzo del punto Z, avente per ascissa x e per ordinata y. Indi considero l'equazione algebrica a coefficienti reali o immaginari

$$f(z) = z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \dots + L = 0,$$

della quale suppongo che le n radici sieno

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \dots z_n = x_n + iy_n,$$

mentre $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ sono i punti-radici che rispettivamente le rappresentano nel piano.

Nell'equazione identica

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

sostituisco al posto di z il valore complesso $x + iy$ e pongo:

$$x + iy - (x_1 + iy_1) = r_1 e^{i\alpha_1},$$
$$x + iy - (x_2 + iy_2) = r_2 e^{i\alpha_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x + iy - (x_n + iy_n) = r_n e^{i\alpha_n};$$

per tale sostituzione risulta

$$f(x + iy) = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)},$$

da cui

(1) $$\text{mod.} f(x + iy) = r_1 r_2 \dots r_n .$$

Ora, essendo

$$r_m e^{i\alpha_m} = x + iy - (x_m + iy_m) = x - x_m + i(y - y_m),$$

ha luogo la formola

$$r_m = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2},$$

dalla quale emerge che r_m rappresenta la distanza dal punto variabile Z al punto radice Z_m. Per tal modo l'equazione (1) contiene la dimostrazione della seguente proposizione:

Se nel primo membro d'un'equazione algebrica a coefficienti reali od immaginari della forma

$$z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \dots + L = 0$$

si sostituisce al posto della variabile il valore complesso $x + iy$, rappresentato dal punto Z, il modulo dell'espressione risultante equivale al prodotto delle distanze del punto Z dagli n punti-radici dell'equazione proposta.

Quando l'equazione ha tutti i coefficienti reali, e quando inoltre si suppone $y = 0$ (cioè quando si prende il punto Z sull'asse reale Ox), il polinomio $f(x)$, fatta astrazione dal segno, non differisce punto dal proprio modulo. In questo caso dunque la precedente proposizione si può modificare come segue:

Il risultato che si ottiene sostituendo un valore reale di x nel primo membro d'un'equazione algebrica a coefficienti reali e della forma

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + L = 0,$$

equivale, fatta astrazione dal segno, al prodotto delle distanze degli n punti-radici dell'equazione da quel punto dell'asse reale che ha per ascissa il valor particolare dato ad x.

Se si suppone

$$f(x) = x^n \mp a^n,$$

oppure

$$f(x) = x^{2n} - 2a^n x^n \cos\theta + a^{2n},$$

dove a è una quantità positiva e θ un arco reale, si hanno due specie di equazioni in cui tutte le radici, come è notissimo, hanno per modulo comune il valore di a e per argomenti una o due serie di archi in progressione aritmetica. Dunque i punti-radici sono allogati in una circonferenza di raggio a col centro nell'origine, e propriamente: nel primo caso, sono n punti che dividono la circonferenza in n parti eguali, incominciando dal punto in cui essa è segata dall'asse Ox, ovvero da quel punto che dista dal precedente per un arco uguale a $\frac{\pi}{n}$, secondo che si considera l'equazione $x^n - a^n = 0$ o la $x^n + a^n = 0$; nel secondo caso, sono $2n$ punti distribuiti in due serie di n, ciascuna delle quali divide la circonferenza in n parti eguali incominciando, l'una serie dall'estremo dell'arco $\frac{\theta}{n}$, l'altra serie dall'estremo dell'arco $-\frac{\theta}{n}$; quindi, applicando a questi due casi la seconda delle due proposizioni stabilite precedentemente, si hanno immediatamente i teoremi di Cotes e di Moivre.

Bologna, 15 aprile 1863.

VIII.

RISOLUZIONE DI ALCUNE QUESTIONI PROPOSTE DAL GIORNALE « NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES ».

I.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome II (1863), pp. 181-184.

L'énoncé de la question est le suivant: *Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un plan fixe; trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.*

Ce lieu est, en général, une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

(SALMON).

Soient $u=0$, $v=0$, $w=0$, les équations des trois plans fixes dans lesquels doivent se trouver les côtés de l'une des faces du tétraèdre; (x_0, y_0, z_0) le point par lequel doit toujours passer le plan de cette face; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les trois autres points fixes. Nous désignerons ces quatre points par (0), (1), (2), (3), respectivement. Soient, enfin, u_1, v_2, w_3, les valeurs de u, v, w, correspondantes aux points (1), (2), (3), respectivement.

Cela posé, désignons par

$$Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation du plan de la face qui passe par le point (0). L'équation du plan de la face, passant par le point (1), sera de la forme

$$Ax+By+Cz+D+\lambda u=0,$$

et comme cette dernière équation doit être satisfaite par les coordonnées du point (1), on aura

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 + D + \lambda u_1 = 0 .$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve pour le plan de la face du tétraèdre, qui passe par le point (1), l'équation

$$A(u x_1 - u_1 x) + B(u y_1 - u_1 y) + C(u z_1 - u_1 z) + D(u - u_1) = 0 .$$

Les plans des deux autres faces, passant par les points (2) et (3), sont représentés par des équations analogues. En éliminant A, B, C, D entre ces trois équations et l'équation

$$A x_0 + B y_0 + C z_0 + D = 0 ,$$

on obtient pour le lieu cherché l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ u x_1 - u_1 x & u y_1 - u_1 y & u z_1 - u_1 z & u - u_1 \\ v x_2 - v_2 x & v y_2 - v_2 y & v z_2 - v_2 z & v - v_2 \\ w x_3 - w_3 x & w y_3 - w_3 y & w z_3 - w_3 z & w - w_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

D'où l'on voit immédiatement que ce lieu est du troisième ordre.

On peut transformer l'équation précédente en celle-ci

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z & 1 \\ 0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ u_1 & u x_1 & u y_1 & u z_1 & u \\ v_2 & v x_2 & v y_2 & v z_2 & v \\ w_3 & w x_3 & w y_3 & w z_3 & w \end{vmatrix} = 0 .$$

Puis, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \alpha_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \alpha_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad (\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1),$$

et en développant le déterminant (2) par rapport aux éléments de la première colonne, l'équation (2) se transforme en celle-ci

$$(3)\quad uvw\Delta = u_1vw\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + v_2uw\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + w_3uv\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Lorsque les quatre points (0), (1), (2), (3) sont dans un même plan, représenté par l'équation

$$p = ax + by + cz + d = 0,$$

on a, comme on sait, non seulement $\Delta = 0$, mais aussi

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} : a = \frac{\partial\Delta}{\partial y_i} : b = \frac{\partial\Delta}{\partial z_i} : c = \frac{\partial\Delta}{\partial \alpha_i} : d = h_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

et l'équation (3) se réduit à

$$\left(h_1\frac{u_1}{u} + h_2\frac{v_2}{v} + h_3\frac{w_3}{w}\right)p = 0.$$

Par suite le lieu se décompose dans le système formé par le plan

$$p = 0$$

et par la surface du second degré

$$h_1\frac{u_1}{u} + h_2\frac{v_2}{v} + h_3\frac{w_3}{w} = 0.$$

Cette surface est évidemment un cône circonscrit au trièdre

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

II.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome II (1863), pp. 209-212.

Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre; le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée.

(MANNHEIM).

Soient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

l'équation de la surface, (x_0, y_0, z_0) un quelconque de ses points; on aura identiquement

$$ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1 . \tag{1}$$

En désignant par δ la distance de l'origine au plan tangent en ce point, les cosinus des angles que la normale fait avec les axes des x, y et z seront respectivement

$$-\delta a x_0, \quad -\delta b y_0, \quad -\delta c z_0 .$$

Cela posé, concevons un nouveau système d'axes orthogonaux des ξ, η et ζ, ayant leur origine au point (x_0, y_0, z_0), et formant avec les axes primitifs des angles dont les cosinus sont indiqués dans le tableau suivant:

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

En nommant λ, μ, ν les cosinus des angles que la normale fait avec ces nouveaux axes, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= -\delta(a\alpha_1 x_0 + b\beta_1 y_0 + c\gamma_1 z_0) , \\ \mu &= -\delta(a\alpha_2 x_0 + b\beta_2 y_0 + c\gamma_2 z_0) , \\ \nu &= -\delta(a\alpha_3 x_0 + b\beta_3 y_0 + c\gamma_3 z_0) , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et les équations des droites ξ, η et ζ, rapportées aux premiers axes, seront respectivement

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\alpha_1 , \\ y &= y_0 + \xi\beta_1 , \\ z &= z_0 + \xi\gamma_1 , \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \eta\alpha_2 , \\ y &= y_0 + \eta\beta_2 , \\ z &= z_0 + \eta\gamma_2 , \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \zeta\alpha_3 , \\ y &= y_0 + \zeta\beta_3 , \\ z &= z_0 + \zeta\gamma_3 , \end{aligned}\right.$$

dans chacune desquelles les variables des deux systèmes se rapportent au même point de l'espace.

Au moyen de ces équations et des équations (1) et (2), on trouve, pour les in-

tersections des trois nouveaux axes avec la surface, les valeurs suivantes de ξ, η et ζ, que nous désignerons par ξ_0, η_0 et ζ_0,

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{\delta(a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2)}{2\lambda},$$

$$\frac{1}{\eta_0} = \frac{\delta(a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2)}{2\mu},$$

$$\frac{1}{\zeta_0} = \frac{\delta(a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2)}{2\nu},$$

de sorte que l'équation, en ξ, η et ζ, du plan mené par ces trois points, pourra se mettre sous la forme

$$(3) \quad \frac{\xi(a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2)}{\lambda} + \frac{\eta(a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2)}{\mu} + \frac{\zeta(a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2)}{\nu} = \frac{2}{\delta}.$$

Or, l'équation de la normale étant

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu} = \frac{\zeta}{\nu} = r,$$

la distance r_0 du point (x_0, y_0, z_0) au point d'intersection avec le plan (3) est donnée par la formule

$$r_0 = \frac{2}{\delta(a + b + c)},$$

et comme celle-ci est indépendante de la direction des droites ξ, η et ζ, la première partie de la question se trouve ainsi démontrée.

Si maintenant on désigne par x, y, z, les coordonnées (relatives aux premiers axes) du point que l'on vient de déterminer, on a

$$x = x_0 - \frac{2ax_0}{a+b+c}, \quad y = y_0 - \frac{2by_0}{a+b+c}, \quad z = z_0 - \frac{2cz_0}{a+b+c},$$

d'où l'on tire

$$x_0 = \frac{a+b+c}{-a+b+c}x, \quad y_0 = \frac{a+b+c}{a-b+c}y, \quad z_0 = \frac{a+b+c}{a+b-c}z.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 au moyen de l'équation (1), on obtient enfin

$$\frac{a(a+b+c)^2}{(-a+b+c)^2}x^2 + \frac{b(a+b+c)^2}{(a-b+c)^2}y^2 + \frac{c(a+b+c)^2}{(a+b-c)^2}z^2 = 1,$$

équation du lieu cherché, qui, partant, est une surface de second ordre, ayant en commun avec la première le centre et la direction des axes.

III.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome II (1863), pp. 302-307.

Remarques au sujet de la question: Démontrer que si $\varphi(2\omega) = \varphi(\omega)\cos\omega$, *on aura* $\varphi(\omega) = \varphi(0)\dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

(VALTON).

La solution indiquée dans cet énoncé n'est pas, à beaucoup près, la plus générale que comporte la question. C'est ce qui ressortira de l'analyse suivante, dans laquelle je supposerai d'abord, pour plus de clarté, que la variable ω se maintienne toujours réelle et positive.

Si l'on multiplie l'équation proposée par $2\sin\omega$, qu'on mette le résultat sous la forme

$$2\,\frac{\varphi(2\omega)}{\sin 2\omega} = \frac{\varphi(\omega)}{\sin\omega},$$

et qu'on pose

$$\frac{\varphi(\omega)}{\sin\omega} = \psi(\omega), \tag{1}$$

on aura à résoudre l'équation suivante, plus simple que la proposée,

$$2\psi(2\omega) = \psi(\omega). \tag{2}$$

En changeant successivement dans celle-ci ω en 2ω, 4ω, ... $2^{m-1}\omega$ on obtient

$$2\psi(4\omega) = \psi(2\omega),$$

$$2\psi(8\omega) = \psi(4\omega),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\psi(2^m\omega) = \psi(2^{m-1}\omega),$$

et, en multipliant toutes ces équations entre elles et avec l'équation (2), il vient

$$2^m\psi(2^m\omega) = \psi(\omega). \tag{3}$$

Ici m est un nombre entier et positif; mais si l'on remplace dans cette formule

ω par $2^{-n}\omega$, où n est un nombre entier et positif moindre que m, on trouve

$$2^m\psi(2^{m-n}\omega)=\psi(2^{-n}\omega);$$

d'un autre côté, en changeant dans la même formule m en $m-n$, il résulte

$$2^{m-n}\psi(2^{m-n}\omega)=\psi(\omega);$$

donc l'équation (3) subsiste pour toute valeur entière, positive ou négative de m.

D'après cette même équation (3) la valeur de la fonction $2^m\psi(2^m\omega)$ est toujours égale, tant que m est un nombre entier, à celle que cette fonction reçoit pour $m=0$. Par suite, la valeur générale de cette fonction, c'est-à-dire celle qui répond à une valeur quelconque rationnelle ou irrationnelle de m, que je désignerai par μ, doit se réduire à $\psi(\omega)$ pour toute valeur entière de μ. Je pose donc

$$2^\mu\psi(2^\mu\omega)=\psi(\omega)\cos 2h\pi\mu+F(\mu,\omega)\sin k\pi\mu,$$

où h et k sont deux nombres entiers quelconques, et où $F(\mu,\omega)$ est une fonction qui ne devient pas infinie pour des valeurs entières de μ. De cette équation, en faisant $\omega=1$, on tire

$$2^\mu\psi(2^\mu)=\psi(1)\cos 2h\pi\mu+F(\mu)\sin k\pi\mu,$$

où l'on a écrit $F(\mu)$ à la place de $F(\mu,1)$. Enfin, en posant

$$2^\mu=\omega,$$

d'où

$$\mu=\frac{\log\omega}{\log 2},$$

et écrivant, d'après l'équation (1), $\frac{\varphi(1)}{\sin 1}$ à la place de $\psi(1)$, on a

$$\psi(\omega)=\frac{\varphi(1)}{\omega\sin 1}\cos\frac{2h\pi\log\omega}{\log 2}+F_1(\omega)\sin\frac{k\pi\log\omega}{\log 2},$$

où

$$F_1(\omega)=\frac{1}{\omega}F\left(\frac{\log\omega}{\log 2}\right).$$

La fonction $F_1(\omega)$ n'est point arbitraire. En effet, si dans l'équation précédente on change ω en 2ω, on obtient

$$2\psi(2\omega)=\frac{\varphi(1)}{\omega\sin 1}\cos\frac{2h\pi\log\omega}{\log 2}+2(-1)^kF_1(2\omega)\sin\frac{k\pi\log\omega}{\log 2},$$

et par suite, d'après l'équation (2),

$$2F_1(2\omega)=(-1)^kF_1(\omega).$$

Si donc on prend pour k un nombre pair $2k$, on aura, pour $\psi(\omega)$, la valeur

$$\psi(\omega) = \frac{\varphi(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(\omega) \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2}, \tag{5}$$

et pour $F_1(\omega)$, l'équation

$$2F_1(2\omega) = F_1(\omega). \tag{6}$$

Cette dernière équation, étant absolument de même forme que l'équation (2), donnera, de la même manière,

$$F_1(\omega) = \frac{F_1(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} + F_2(\omega) \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2},$$

et, pour la fonction $F_2(\omega)$, on aura de nouveau

$$F_2(\omega) = \frac{F_2(1)}{\omega \sin 1} \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + F_3(\omega) \sin \frac{2k''\pi \log \omega}{\log 2},$$

et ainsi de suite.

En substituant successivement ces valeurs les unes dans les autres et dans les équations (5) et (2), on trouvera enfin

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega \sin 1}\Big[\varphi(1) \cos \frac{2h\pi \log \omega}{\log 2} + F_1(1) \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h'\pi \log \omega}{\log 2} +$$
$$+ F_2(1) \sin \frac{2k\pi \log \omega}{\log 2} \sin \frac{2k'\pi \log \omega}{\log 2} \cos \frac{2h''\pi \log \omega}{\log 2} + \ldots\Big].$$

Or, on voit assez clairement que l'ensemble des termes renfermés dans les parenthèses, à raison de la valeur entièrement arbitraire qu'on peut attribuer à chacune des constantes

$$\begin{matrix} \varphi(1), & F_1(1), & F_2(1), & \ldots \\ h, & h', & h'', & \ldots \\ k, & k', & k'', & \ldots, \end{matrix}$$

dont le nombre est indéterminé, peut être censé représenter une fonction quelconque des deux quantités

$$\sin \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \qquad \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2},$$

ou même d'une seule d'entre elles, ce qui ne diminue point la généralité de cette fonction.

En désignant donc celle-ci par

$$\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\,,\ \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right),$$

on pourra poser

$$\varphi(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}\,\Theta\left(\sin\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\,,\ \cos\frac{2\pi\log\omega}{\log 2}\right). \tag{7}$$

D'après la manière dont cette formule a été obtenue, ω y entre comme une quantité positive; mais, si l'on se reporte à l'équation proposée, on voit facilement que la valeur de $\varphi(\omega)$ donnée ci-dessus ne cesse de satisfaire à cette équation quand on donne à ω des valeurs négatives ou même imaginaires; car les formules

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u\,, \qquad \log uv = \log u + \log v$$

continuent d'avoir lieu quand u et v deviennent imaginaires, ainsi que l'a démontré CAUCHY (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV), pourvu que l'on adopte des définitions convenables pour ces fonctions, quand la variable devient imaginaire. On peut donc regarder la formule (7) comme étant applicable à tous les cas.

Si l'on suppose que la fonction Θ se réduise à une simple constante arbitraire, et si l'on remarque que cette constante représente alors la valeur que la fonction reçoit pour $\omega = 0$, on obtient, comme cas particulier de la formule (7), la solution indiquée dans l'énoncé de la question.

IV.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome III (1864), pp. 64-66.

En calculant la valeur algébrique du déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} & \dots & (n)_{n-1} \\ (n)_{n-1} & z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} & \dots & (n)_{n-2} z \\ (n)_{n-2} z & (n)_{n-1} & z^{n-1} & \dots & (n)_{n-3} z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} & (n)_3 z^{n-4} & \dots & z^{n-1} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$(n)_m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1, 2 \ldots m},$$

les puissances impaires de z disparaissent, et, en posant $z^2 = t$, l'équation $\Delta = 0$ est l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

(MICHAEL ROBERTS).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0; \tag{1}$$

on aura identiquement, quel que soit z,

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) = z^n - 1,$$

et, par suite,

$$[z-(\alpha_1-\alpha_r)][z-(\alpha_2-\alpha_r)]\ldots[z-(\alpha_n-\alpha_r)] = (z+\alpha_r)^n - 1,$$

équation dont le premier membre contient le facteur z. Ainsi l'équation

$$\frac{(z+\alpha_1)^n - 1}{z} \cdot \frac{(z+\alpha_2)^n - 1}{z} \ldots \frac{(z+\alpha_n)^n - 1}{z} = 0, \tag{2}$$

du degré $n(n-1)$ en z, aura pour racines les $n(n-1)$ différences simples $\alpha_r - \alpha_s$ entre les racines de l'équation (1), et comme ces différences sont deux à deux égales et de signes contraires, le développement du premier membre de l'équation (2) ne contiendra que des puissances paires de z.

Maintenant, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.\ 2 \ldots m} = (n)_m,$$

on a, à cause de $\alpha_r^n = 1$,

$$\frac{(z+\alpha_r)^n - 1}{z} = z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2}\alpha_r + (n)_2 z^{n-3}\alpha_r^2 + \ldots + (n)_{n-1}\alpha_r^{n-1}.$$

Donc, si l'on pose

$$y = z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2} x + (n)_2 z^{n-3} x^2 + \ldots + (n)_{n-1} x^{n-1},$$

le premier membre de l'équation (1) équivaudra au produit des n valeurs de y correspondant aux valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ de x, et l'équation (2) elle-même pourra s'obtenir en éliminant x entre les deux équations

$$z^{n-1} + (n)_1 z^{n-2} x + (n)_2 z^{n-3} x^2 + \ldots + (n)_{n-1} x^{n-1} = 0, \tag{3}$$

$$x^n - 1 = 0.$$

Pour opérer cette élimination, multiplions successivement par x, x^2, ... x^{n-1} la première des deux équations précédentes, en observant que d'après la seconde de ces équations on a

$$x^{n+i} = x^i.$$

Ordonnant par rapport à x les $n-1$ équations résultantes, on obtient le système suivant:

$$\begin{array}{l}
(n)_{n-1} + z^{n-1}x \quad + (n)_1 z^{n-2}x^2 + \ldots + (n)_{n-2} z x^{n-1} = 0, \\
(n)_{n-2} z + (n)_{n-1} x \quad + z^{n-1}x^2 \quad + \ldots + (n)_{n-3} z^2 x^{n-1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n)_1 z^{n-2} + (n)_2 z^{n-3} x + (n)_3 z^{n-4} x^2 + \ldots + z^{n-1} x^{n-1} = 0;
\end{array}$$

et éliminant linéairement les $n-1$ quantités x, x^2, ... x^{n-1} au moyen de ces $n-1$ équations et de l'équation (3), on a enfin

$$\Delta = 0, \tag{4}$$

où Δ désigne le déterminant de l'énoncé.

Le développement de ce déterminant ne peut contenir, d'après ce qui a été remarqué plus haut, que des puissances paires de z; si donc on pose $z^2 = t$, on obtient une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en t, dont les racines sont les carrés des différences entre les n racines de l'équation (1).

C'est ce résultat qui constitue le théorème de M. ROBERTS, que je me proposais de démontrer.

V.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome IV (1865), pp. 232-233.

(Nota della Redazione del giornale « Nouvelles Annales de Mathématiques » a proposito di una lettera del BELTRAMI).

La surface lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement.

(STREBOR).

Comme M. DURRANDE *), M. BELTRAMI emploie les coordonnées elliptiques et ar-

*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ème série, tome IV, pag. 125.

rive à l'équation

$$\mu^2 + \nu^2 = \beta^2; \tag{1}$$

mais il conclut le théorème de M. Strebor de ce que cette équation ne contient pas le paramètre ρ, parce qu'en général, dans tout système de coordonnées curvilignes et orthogonales, toute équation qui ne renferme que deux paramètres (μ, ν) coupe orthogonalement toutes les surfaces caractérisées par une valeur constante du troisième paramètre ρ. M. Beltrami fait en outre les observations suivantes: 1° le lieu des sections circulaires diamètrales des hyperboloïdes homofocaux à une nappe coupe orthogonalement ces hyperboloïdes; 2° l'équation (1) représente une surface du quatrième degré et possède une droite double qui est l'axe des y; tout plan mené par cette droite coupe la surface suivant un cercle.

IX.

RICERCHE DI ANALISI APPLICATA ALLA GEOMETRIA.

Giornale di Matematiche, vol. II (1864), pp. 267-282, 297-306, 331-339, 355-375;
vol III (1865), pp. 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314.

I.

Consideriamo un sistema di linee a doppia curvatura, distribuite nello spazio in modo che per ciaschedun punto ne passi una sola od al più un numero finito. Le equazioni di una delle curve appartenenti a questo sistema si potranno supporre ridotte alla forma:

$$(1) \qquad \xi = \xi(t, u, v), \qquad \eta = \eta(t, u, v), \qquad \zeta = \zeta(t, u, v),$$

dove u e v sono due parametri arbitrarî il cui valore serve ad individuare le singole curve, e t è una variabile che definisce i punti di ciascuna curva in particolare; ξ, η, ζ sono le coordinate correnti, che supponiamo ortogonali.

Cerchiamo la condizione che deve essere soddisfatta dalle funzioni ξ, η, ζ affinchè esista una superficie che incontri normalmente tutte queste curve.

Se nelle equazioni (1) si sostituisce al posto di t una funzione determinata di u e di v, le equazioni stesse rappresenteranno un punto (od al più una serie discontinua di punti) della linea (u, v), e variando u e v in tutti i modi possibili si otterrà un sistema continuo di punti, costituente una superficie. Le u e v fanno l'ufficio di coordinate curvilinee (Gaussiane) rispetto a questa superficie, e le projezioni di un suo ele-

mento lineare sui tre assi sono

$$
(2)\qquad \begin{cases}
d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \xi}{\partial u} du + \dfrac{\partial \xi}{\partial v} dv\,, \\[2ex]
d\eta = \dfrac{\partial \eta}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \eta}{\partial u} du + \dfrac{\partial \eta}{\partial v} dv\,, \\[2ex]
d\zeta = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} du + \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} dv\,,
\end{cases}
$$

dove si deve intendere sostituita per t una funzione di u e di v.

Per il punto (ξ, η, ζ) di questa superficie passa una linea del sistema (1), che ha ivi per tangente una retta la quale fa coi tre assi angoli i cui coseni sono proporzionali alle quantità

$$
\frac{\partial \xi}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t}\,.
$$

Affinchè questa retta coincida colla normale alla superficie testè considerata, è necessario e sufficiente che si abbia, per ogni valore di u e di v,

$$
\frac{\partial \xi}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t} d\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\zeta = 0\,,
$$

ossia, ponendo per brevità

$$
\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 = T,
$$

$$
\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial u} = U,
$$

$$
\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial v} = V,
$$

ed osservando le (2),

$$
(3)\qquad T\,dt + U\,du + V\,dv = 0.
$$

Perchè esista la superficie ortogonale bisogna dunque che si possa assegnare una funzione di u e di v tale, che messa al posto di t in quest'ultima equazione, la renda identicamente soddisfatta; e reciprocamente, se esiste una tal funzione, esiste anche la superficie ortogonale. In altre parole, è necessario e sufficiente che l'equazione differenziale totale (3) possa essere integrata per mezzo di *una sola* relazione finita fra le t, u, v, ossia che risulti soddisfatto il noto criterio d'integrabilità dei differenziali a tre variabili

$$
(4)\qquad T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0\,.
$$

Tale è la condizione dell'esistenza di una superficie ortogonale alle linee (1).

Giova distinguere tre casi:

1°) Quando l'equazione (4) è identica, l'equazione (3) ha un integrale finito con una costante arbitraria, epperò le superficie ortogonali sono in numero infinito;

2°) Quando l'equazione (4) non è identica, ma stabilisce fra le t, u, v una relazione che soddisfa all'equazione differenziale (3), questa non possiede che un integrale particolare, che è la stessa equazione (4), epperò non esiste che una sola superficie ortogonale;

3°) Finalmente, se non si verifica alcuno dei due casi precedenti, non esiste alcuna superficie ortogonale e quindi il problema non ammette soluzione.

Nei primi due casi l'equazione ordinaria in ξ, η, ζ della superficie ortogonale si ottiene eliminando le t, u, v fra le equazioni (1) e l'integrale dell'equazione (3).

II.

L'equazione (4) si semplifica alquanto allorchè la variabile t è l'arco della linea (u, v), contato da un certo punto, che si può considerare come l'intersezione della linea stessa con una superficie iniziale arbitraria, la cui equazione si otterrebbe ponendo $t = 0$ nelle (1) ed eliminando u, v. In questa ipotesi si ha $T = 1$, e la condizione (4) assume la forma più semplice

$$\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} + U\frac{\partial V}{\partial t} - V\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Questa circostanza si verifica particolarmente nel caso, degno di speciale considerazione, in cui le linee del sistema (1) sieno rette. Infatti le equazioni (1) assumono allora la forma:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x + tX, \\ \eta &= y + tY, \\ \zeta &= z + tZ, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove X, Y, Z sono i coseni degli angoli che la retta (u, v) fa coi tre assi; x, y, z sono le coordinate del punto d'intersezione della retta variabile colla superficie iniziale, t la porzione di retta compresa fra questa superficie e il punto (ξ, η, ζ). Le sei quantità x, y, z, X, Y, Z sono funzioni determinate delle due variabili u e v.

In questo caso si ha

$$\left\{\begin{aligned} U &= X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u}, \\ V &= X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

per cui la condizione (5) diventa semplicemente

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}, \tag{8}$$

od anche, sostituendo i valori (7) e riducendo

$$\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{9}$$

La condizione dell'esistenza di una superficie normale ad un sistema di rette venne data sotto questa forma dal sig. KUMMER *).

Si può supporre invece che i coseni X, Y, Z sieno dati in funzione delle coordinate x, y, z del punto in cui la retta incontra la superficie iniziale; in questo caso, esprimendo le derivate di X, Y, Z rispetto ad u, v per quelle rispetto ad x, y, z, si ottiene

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0,$$

ossia, rappresentando con $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie iniziale, ed osservando che si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Se la superficie iniziale $F = 0$ si considera come data, quest'equazione, combinata colla $F = 0$, è la condizione cui devono soddisfare le funzioni X, Y, Z, affinchè le rette che partono da quella superficie formino il sistema delle normali di una medesima

*) *Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVII (1860), pag. 189].

superficie. Ma se, col sig. ABEL TRANSON *), si considerano le x, y, z come le coordinate di un punto *qualunque* dello spazio, e la funzione F come indeterminata, essendo infiniti i valori di questa funzione che possono soddisfare all'equazione (10), è chiaro che esistono sempre, ed in numero infinito, superficie dotate della proprietà di contenere i punti di partenza di un sistema di rette normali ad una stessa superficie. Ritorneremo in seguito su questa quistione.

Se, attenendoci alla prima ipotesi, supponiamo già eliminata la z dalle funzioni X, Y, Z per mezzo dell'equazione $F = z - z(x, y) = 0$, la (10) diventa

$$\frac{\partial X}{\partial y} + p\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + q\frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial y}(X + pZ) = \frac{\partial}{\partial x}(Y + qZ).$$

A questa formola, dalla quale reciprocamente potrebbe ricavarsi la (10), pervenne il sig. DIEU **). Essa trovasi anche nell'eccellente *Traité de calcul différentiel* del sig. BERTRAND, § 648.

L'equazione (8) esprime, come è notissimo, che l'espressione $U du + V dv$ è il differenziale esatto di una funzione delle due variabili u e v. Dalle (7) si ha poi

$$U du + V dv = X dx + Y dy + Z dz,$$

cosicchè l'esistenza di una superficie ortogonale richiede che quest'ultimo trinomio possa divenire, mercè l'equazione in x, y, z della superficie iniziale, il differenziale esatto di una funzione di due variabili indipendenti. Questa proprietà si può interpretare geometricamente, come può vedersi nel citato libro del sig. BERTRAND.

III.

Supponiamo che la condizione (8) sia identicamente soddisfatta e che esista quindi una funzione $\varphi(u, v)$ tale che si abbia

$$U du + V dv = d\varphi$$

cioè

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \tag{11}$$

---

*) Journal de l'École Polytechnique, tome XXII, cahier 38 (1861), pag. 195; Nouvelles Annales de Mathématiques (2me série), t. II (1863), pag. 138.

**) Nouvelles Annales de Mathématiques, tomo XI (1852), pag. 68.

È chiaro che anche il binomio $U'du + V'dv$ sarà un differenziale esatto se si prenderà

$$U' = U.F(\varphi), \qquad V' = V.F(\varphi) \tag{12}$$

dove F è simbolo di funzione arbitraria. Ora, qualunque sia questa funzione, è chiaro che si potrà sempre determinare un secondo sistema di rette, che diremo sistema *derivato* e che rappresenteremo colle equazioni

$$\xi = x + tX',$$

$$\eta = y + tY',$$

$$\zeta = z + tZ',$$

in modo che risultino soddisfatte le relazioni

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial u} + Y'\frac{\partial y}{\partial u} + Z'\frac{\partial z}{\partial u} = U.F(\varphi),$$

$$X'\frac{\partial x}{\partial v} + Y'\frac{\partial y}{\partial v} + Z'\frac{\partial z}{\partial v} = V.F(\varphi).$$

Abbiamo così *un* modo di ricavare da un sistema di rette, normali ad una medesima superficie, infiniti altri sistemi dotati della stessa proprietà. Cerchiamo di conoscere la connessione che questi nuovi sistemi hanno, sotto l'aspetto geometrico, col sistema primitivo.

Poniamo per brevità $\varkappa$ in luogo di $F(\varphi)$; sostituendo nelle (12) ad U, V, U', V' i loro valori, si ha

$$\left\{\begin{aligned} (X' - \varkappa X)\frac{\partial x}{\partial u} + (Y' - \varkappa Y)\frac{\partial y}{\partial u} + (Z' - \varkappa Z)\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ (X' - \varkappa X)\frac{\partial x}{\partial v} + (Y' - \varkappa Y)\frac{\partial y}{\partial v} + (Z' - \varkappa Z)\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Le quantità $X' - \varkappa X$, $Y' - \varkappa Y$, $Z' - \varkappa Z$ sono evidentemente proporzionali ai coseni degli angoli formati coi tre assi da una certa retta giacente nel piano delle due rette (X, Y, Z), (X', Y', Z'). Le due equazioni precedenti esprimono manifestamente che questa retta è normale alla superficie iniziale: epperò *due rette corrispondenti del sistema primitivo e di un sistema derivato sono in un medesimo piano colla normale alla superficie iniziale nel punto da cui partono le rette stesse.*

Reciprocamente, se due rette corrispondenti qualisivogliano debbono essere in un piano normale alla superficie iniziale, bisogna che esista una funzione $\varkappa$ di u e di v che soddisfaccia alle due equazioni (13), e quindi si deve avere $U' = \varkappa U$, $V' = \varkappa V$. Se ne deduce

$$\frac{\partial U'}{\partial v} = \varkappa \frac{\partial U}{\partial v} + U \frac{\partial \varkappa}{\partial v}, \qquad \frac{\partial V'}{\partial u} = \varkappa \frac{\partial V}{\partial u} + V \frac{\partial \varkappa}{\partial u},$$

epperò, affinchè il sistema derivato sia normale ad una superficie, del pari che il primitivo, si deve avere

$$U \frac{\partial \varkappa}{\partial v} = V \frac{\partial \varkappa}{\partial u}.$$

L'integrazione di quest'equazione alle derivate parziali dà, in virtù delle (11), $\varkappa = F(\varphi)$. Dunque: *se i due sistemi debbono essere formati dalle normali a due superficie, e se due rette corrispondenti qualsivogliano debbono giacere in un piano normale alla superficie iniziale, la relazione più generale fra i due sistemi è data dalle* (12).

Indichiamo con θ e θ' gli angoli che le due rette precedenti fanno colla normale alla superficie iniziale, e poniamo, come al solito,

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta^2.$$

I coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale alla superficie iniziale fa coi tre assi sono dati dalle formole

$$\cos\lambda = \frac{A}{\Delta}, \qquad \cos\mu = \frac{B}{\Delta}, \qquad \cos\nu = \frac{C}{\Delta};$$

sostituendo questi valori nella nota formola

$$\operatorname{sen}^2\theta = (Y\cos\nu - Z\cos\mu)^2 + (Z\cos\lambda - X\cos\nu)^2 + (X\cos\mu - Y\cos\lambda)^2,$$

si trova facilmente

$$(14)\qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{EV^2 - 2FUV + GU^2}{EG - F^2}.$$

Analogamente si troverebbe

$$\operatorname{sen}^2\theta' = \varkappa^2 \frac{EV^2 - 2FUV + GU^2}{EG - F^2},$$

ossia, ricordando il valore di $\varkappa$,

$$(15)\qquad \operatorname{sen}\theta' = \pm F(\varphi)\operatorname{sen}\theta.$$

Di qui vediamo che fra le rette corrispondenti dei due sistemi sussiste una seconda relazione: cioè che *il rapporto fra i seni degli angoli che esse formano colla normale alla superficie iniziale non dipende che dal valore della funzione* φ.

Reciprocamente se, *ammessa l'esistenza di questa funzione,* cioè ammesso che le rette di un certo sistema sieno normali ad una superficie, si ha un secondo sistema derivato dal primo con queste leggi, che due rette corrispondenti qualsivogliano sieno in un piano normale alla superficie iniziale nel punto in cui la incontrano, e che il rapporto fra i seni degli angoli ch'esse formano colla normale in questo punto varî solamente con φ, anche le rette del secondo sistema saranno tutte normali ad una medesima superficie. Ciò risulta facilmente dai principj esposti.

Quando la funzione $F(\varphi)$ si riduce ad una costante, le due leggi precedenti non differiscono da quelle che caratterizzano la riflessione e la rifrazione (ordinaria) dei raggi luminosi, secondo che questa costante è eguale o differente dall'unità. Perciò risulta dimostrato il celebre teorema di MALUS *), generalizzato da DUPIN **), che può enunciarsi così: *se un fascio di raggi, normali ad una medesima superficie, si riflette un numero qualunque di volte, o si rifrange alle superficie di separazione di più mezzi omogenei successivi, esso non cessa mai d'essere formato dalle normali d'una medesima superficie.*

Quando si assume per F una vera funzione di φ, si ottiene un nuovo teorema, che verrà enunciato più sotto.

Se si ammette che la relazione fra θ e θ' debba essere la stessa in ogni punto della superficie iniziale, $F(\varphi)$ deve essere evidentemente una quantità costante. Per ciò che si è dimostrato è dunque chiaro che, *nell'ipotesi che ogni raggio rifratto resti nel piano normale alla superficie rifrangente, la legge della natura è la sola, secondo la quale i raggi rifratti risultino normali ad una medesima superficie, posto che lo sieno i raggi*

---

*) *Mémoire sur l'optique* [Journal de l'École Polytechnique, tome VII, cahier 14 (1808), pag. 1].

**) *Applications de Géométrie et de Mécanique...*, quatrième Mémoire; Paris, BACHELIER, successeur de M.me V. COURCIER, Libraire, 1822, pag. 187.

incidenti. È questo un teorema che venne già dato dal sig. BERTRAND, nell'importante *Mémoire sur la théorie des surfaces* *), in cui dà pure una dimostrazione del teorema di MALUS-DUPIN. Un'altra elegante dimostrazione di quest'ultimo teorema si può vedere nel suo *Trattato di calcolo differenziale,* § 659.

Quando la condizione (8) è soddisfatta, si ottiene una qualunque delle superficie ortogonali prendendo su ciascun raggio, dal punto in cui esso interseca la superficie iniziale, una porzione $t(u, v)$ data dall'equazione

$$t = \text{cost.} - \varphi(u, v),$$

che si ottiene integrando la (3). Per il sistema derivato nel modo suesposto si avrà

$$t_1 = \text{cost.} - \int F(\varphi)\, d\varphi,$$

quindi nel caso della rifrazione si ha

$$t_1 = \text{cost.} + nt,$$

dove n è l'indice di rifrangibilità.

IV.

Consideriamo sulla superficie iniziale tre punti infinitamente vicini, A, B e C, di coordinate (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$. La condizione affinchè gli elementi AB, AC sieno perpendicolari fra loro è

$$E\, du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v = 0.$$

Supponiamo che l'arco AB appartenga ad una delle curve comprese nell'equazione $\varphi(u, v) = \text{cost.}$, dove φ è una funzione qualunque di u e di v: si avrà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0,$$

e quindi la direzione dell'elemento AC perpendicolare alla curva $\varphi = \text{cost.}$ si otterrà eliminando il rapporto $\frac{du}{dv}$ fra le due precedenti equazioni: in tal modo si ha

$$\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta u + \left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta v = 0.$$

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome IX (1844), pag. 133.

Per il punto C passa una curva del sistema $\varphi = \text{cost.}$, in tutti i punti della quale il valore della funzione riceve l'incremento $\delta\varphi$, e si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v = \delta\varphi .$$

Dalle due ultime equazioni si cava

$$\delta u = \frac{\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\delta\varphi}{H^2}, \qquad \delta v = \frac{\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta\varphi}{H^2}$$

dove si è posto per un momento

$$H^2 = E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 .$$

Dalle due ultime formole si ricava

$$E\delta u + F\delta v = \frac{(EG - F^2)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta\varphi}{H^2},$$

$$F\delta u + G\delta v = \frac{(EG - F^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta\varphi}{H^2},$$

da cui finalmente, moltiplicando ordinatamente per δu, δv e sommando,

$$E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2 = \frac{(EG - F^2)\delta\varphi^2}{H^2} .$$

Il primo membro di quest'equazione è evidentemente il quadrato della lunghezza AC: indicandola con $\delta\sigma$ si ha quindi

$$(16) \qquad \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}\right)^2 = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} .$$

La quantità $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}$ è il rapporto che passa tra l'incremento $\delta\varphi$ che riceve φ nel passare da una curva alla curva infinitamente vicina, e la distanza normale $\delta\sigma$ di queste due curve nel punto (u, v). Essa presenta, rispetto ad un sistema di curve tracciate in una superficie, la più perfetta analogia con quella quantità che il sig. LAMÉ *) ha

*) *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), pag. 6, e le altre Memorie dell'illustre Autore.

così felicemente introdotto nella teoria dei sistemi di superficie sotto il nome di *parametro differenziale del 1° ordine*. Noi conserveremo perciò questa denominazione alla quantità $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma}$, ossia alla radice quadrata dell'espressione che forma il secondo membro della (16). È inutile far osservare che il suo valore non dipende soltanto, in una superficie data, dalla natura del sistema di curve cui essa appartiene, ma eziandio dalla legge con cui si succedono le curve stesse, ossia dal modo in cui si fa variare il parametro che serve ad individuarle. Così l'equazione $f(\varphi) = \text{cost.}$ rappresenta certamente le medesime curve della $\varphi = \text{cost.}$, ma i loro parametri differenziali ϖ' ed ϖ stanno nella relazione $\varpi' = \varpi f'(\varphi)$, epperò il loro rapporto è costante lungo una stessa curva del sistema, variabile da una curva all'altra.

Il parametro differenziale testè definito rappresenta un ente il cui valore non dipende punto dalla natura delle curve coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$; esso ha quindi la proprietà (facilmente verificabile *a posteriori*) di conservare sempre la medesima *forma*, comunque si muti la disposizione di quelle curve.

Per quei sistemi di curve nei quali la distanza normale di due curve consecutive è costante in ciascuno dei loro punti, il parametro differenziale rimane evidentemente costante lungo una medesima curva e varia soltanto da una curva all'altra. In altre parole esso è funzione soltanto di φ: l'equazione generale, alle derivate parziali, di questi sistemi di curve è quindi la seguente:

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = f(\varphi). \tag{17}$$

Si potrebbe ridurre all'unità il secondo membro di quest'equazione, sostituendo a φ la funzione $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}}$, con che evidentemente non si altererebbe punto la natura delle curve. Ma la conservazione della funzione $f(\varphi)$ è indispensabile ogni volta che occorra tener conto dei parametri differenziali.

La precedente equazione caratterizza, sulle superficie, un genere di parallelismo che si può chiamare *geodetico*. Infatti si può dimostrare facilmente che una qualunque delle famiglie di curve definite da essa non è altro che la serie delle trajettorie ortogonali di un sistema (arbitrario) di linee geodetiche, ovvero la serie delle *sviluppanti geodetiche* della curva inviluppata da tutte le linee geodetiche anzidette. Infatti supponiamo che la superficie sia riferita ad un sistema di coordinate ortogonali, per modo che si abbia $F = 0$. L'equazione (17), senza perdere la sua generalità, assumerà la forma più semplice

$$E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = EG.f(\varphi).$$

Supponiamo che le curve $u = \text{cost.}$ sieno quelle che costituiscono una delle famiglie φ: basterà per ciò porre $\varphi = u$, e le curve $v = \text{cost.}$ diventeranno in tal modo le trajettorie ortogonali di una (qualunque) delle famiglie di curve definite dalla (17). Ora facendo $\varphi = u$ si ottiene

$$G = E\,G.f(u)\,,$$

quindi

$$E = \frac{1}{f(u)}\,,$$

ossia

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0;$$

dunque, per un notissimo teorema di GAUSS, le trajettorie sono costituite da una serie di linee geodetiche, come si era asserito.

Quando la superficie è riferita ad un sistema di coordinate isoterme, si ha $F = 0$, $E = G = \lambda(u, v)$, e l'equazione (17) diventa

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = \lambda.f(\varphi).$$

Per una superficie sviluppabile si può prendere $\lambda = 1$, e si ricade così nella nota equazione del parallelismo nel piano *).

L'equazione (17) venne data anche da GAUSS **), che la dedusse dalla trasformazione delle coordinate curvilinee; essa fu recentemente richiamata dal sig. WEINGARTEN ***), il quale ha osservato come essa corrisponda all'equazione del moto di un punto sopra una superficie, quando sul medesimo non agiscano forze esterne.

V.

Restituiamo a φ il significato che ha nell'equazione (11), ed indichiamo con s l'arco della linea $\varphi = \text{cost.}$; avremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} : \frac{du}{ds} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{dv}{ds} = H$$

e quindi

*) BORDONI, *Sul parallelismo* [Atti dell'Istituto Lombardo, vol. I (1858), pag. 209].

**) *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XXII.

***) *Ueber die Flächen deren Normalen eine gegebene Fläche berühren* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXII (1863), pag. 61].

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right);$$

da queste formole, chiamando ω l'angolo che la retta (X, Y, Z) fa colla tangente alla curva $\varphi = \text{cost.}$, si deduce

$$\cos\omega = \frac{U\frac{\partial \varphi}{\partial v} - V\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H}, \tag{18}$$

ossia, per le (11),

$$\cos\omega = 0.$$

Dunque: *le curve* $\varphi(u, v) = \text{cost.}$ *sono incontrate normalmente dalle rette del sistema.*

Non si deve credere che l'esistenza di queste trajettorie ortogonali sia caratteristica dei sistemi di rette normali ad una superficie. Qualunque sia la superficie iniziale, si può sempre tracciare in essa una serie di linee che seghino normalmente le rette di un sistema arbitrario. Questo fatto emerge da considerazioni geometriche che si affacceranno spontaneamente alla mente del lettore: ma esso risulta immediatamente anche da ciò che qualunque siano le funzioni U e V, esiste sempre un numero infinito di fattori $\frac{1}{\tau}$, funzioni di u e di v, che rendono il primo membro dell'equazione

$$U\,du + V\,dv = 0$$

differenziale esatto di una funzione $\Phi(u, v)$, cosicchè

$$U = \tau\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad V = \tau\frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

epperò

$$U\frac{\partial \Phi}{\partial v} - V\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0,$$

donde consegue, in virtù della (18), che le curve $\Phi = \text{cost.}$ sono incontrate normalmente dalle rette del sistema, benchè non obbediscano a veruna condizione speciale. Ma questa stessa circostanza ci conduce a dare un nuovo enunciato alla condizione perchè esse sieno normali ad una superficie. Infatti, chiamando ϖ_Φ il parametro differenziale della funzione Φ, si ha, rammentando la (14),

$$\text{sen}\,\theta = \tau\varpi_\Phi.$$

Ciò posto, se l'espressione $U du + V dv$ è un differenziale esatto, è lecito prendere $\tau = 1$; e reciprocamente, se il fattore τ che produce $U du + V dv = \tau d\Phi$ può esser fatto uguale ad 1, quell'espressione è un differenziale esatto. Ora al valore $\tau = 1$ del fattore (quando questo valore è ammissibile), corrisponde una forma φ della funzione Φ per la quale si ha

$$\operatorname{sen} \theta = \varpi_\varphi .$$

Possiamo dunque dire che: *affinchè le rette del sistema sieno normali ad una superficie è necessario e sufficiente che le curve tracciate nella superficie iniziale ortogonalmente alle rette stesse, possano essere distribuite in modo che il loro parametro differenziale eguagli in ogni punto il seno dell'angolo che la retta corrispondente fa colla normale alla superficie.*

Richiamandoci in mente la relazione fra due sistemi di rette, derivati l'uno dall'altro nel modo esposto all'art. III, possiamo formulare nel modo che segue la loro dipendenza geometrica:

Le rette del sistema primitivo e di uno qualunque dei sistemi derivati sono incontrate ortogonalmente da una medesima serie di curve tracciate sulla superficie iniziale.

Il rapporto dei seni degli angoli che due rette corrispondenti fanno colla normale a questa superficie nel punto comune, è costante in tutti i punti di una di queste trajettorie e varia soltanto da una trajettoria all'altra.

Rammentiamo che questa seconda proprietà è una conseguenza *necessaria* della prima, ammesso che i due sistemi debbano essere normali a due superficie.

Reciprocamente se due sistemi sono connessi da queste due relazioni e se le rette dell'uno sono normali ad una superficie, anche quelle dell'altro sono dotate della stessa proprietà.

Se la superficie iniziale si considera come limite di un mezzo *eterogeneo,* è chiaro che l'indice di rifrangibilità, variabile da un punto all'altro di questa superficie, sarà costante lungo certe linee tracciate in essa: possiamo quindi formulare il seguente teorema, che è una nuova generalizzazione di quello di MALUS-DUPIN.

Se un fascio di raggi luminosi, normali ad una superficie, si rifrange alla superficie di un mezzo eterogeneo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i raggi rifratti sieno pure normali ad una superficie è che le linee lungo le quali è costante l'indice di rifrangibilità incontrino ortogonalmente i raggi incidenti.

È chiaro che qui assumiamo come direzione di un raggio rifratto quella della tangente alla curva che esso descrive nel mezzo rifrangente.

Nel caso attuale chiamando $n(u, v)$ l'indice di rifrangibilità nel punto (u, v), si avrà (art. III)

$$U' = -f(n)\frac{\partial t}{\partial u}, \qquad V' = -f(n)\frac{\partial t}{\partial v},$$

quindi

$$U' du + V' dv = -f(n) dt = -dt_1,$$

e la costruzione della superficie ortogonale ai raggi rifratti si otterrà dalla formola

$$t_1 = \int f(n) dt + \text{Cost.},$$

dove n dovrà esprimersi in funzione di t, o t di n.

VI.

Consideriamo le rette del sistema primitivo come invariabilmente connesse colla superficie iniziale (scelta ad arbitrio). Non farà difficoltà concepire questa connessione quando si supponga che la retta uscente da un punto dato debba formare angoli dati (variabili da punto a punto secondo leggi determinate) colle tangenti a due curve arbitrarie tracciate per quel punto sulla superficie, per es. alle due curve dei sistemi $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ che passano per il punto considerato. Nulla impedisce allora di supporre che la superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, assuma una qualunque delle infinite forme conciliabili colla sua natura, trasportando con sè tutte le rette del sistema: a ciascuna di queste forme corrisponderà evidentemente una disposizione pienamente determinata di quelle rette.

Sieno $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ gli angoli che la retta (X, Y, Z) fa colle curve $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ nel punto (u, v), in cui essa incontra la superficie iniziale. In virtù dei valori (7) si ha

$$U = \sqrt{E}.\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{G}.\cos\beta,$$

e quindi la condizione dell'esistenza di una superficie ortogonale diventa

$$\frac{\partial(\sqrt{E}.\cos\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G}.\cos\beta)}{\partial u}.$$

Ora le quantità E, G rimangono inalterate nelle varie flessioni della superficie; gli angoli α e β rimangono anch'essi, per ipotesi, formati sempre nello stesso modo con u e v: dunque se l'equazione precedente è soddisfatta quando la superficie ha una certa forma, essa non cessa d'esserlo in tutte le possibili trasformazioni della superficie stessa.

Abbiamo dunque il seguente teorema:

Se le rette componenti un sistema sono normali ad una superficie, e se queste rette si considerano come invariabilmente connesse ad una superficie arbitraria (nei punti in cui esse la incontrano), *in ogni flessione di questa superficie esse si manterranno sempre normali ad una superficie.*

Rammentiamo ancora che l'equazione (3), nel caso delle rette normali ad una superficie, dà

$$t = \text{Cost.} - \varphi(u, v),$$

dove t è la lunghezza che si deve portare su ciascuna retta, partendo dalla superficie iniziale, per ottenere il punto d'intersezione con una delle superficie ortogonali. Questa lunghezza non dipende che dalla funzione φ, la quale è data dall'equazione

$$\sqrt{E}.\cos\alpha\, du + \sqrt{G}.\cos\beta\, dv = d\varphi,$$

e che rimane quindi inalterata, per le ipotesi fatte, in ogni flessione della superficie iniziale. Dunque: *comunque si trasformi questa superficie* (supposta flessibile ed inestendibile), *il luogo geometrico degli estremi delle lunghezze t, ritenuto che le rette restino sempre connesse alla superficie, non cessa mai d'essere una superficie ortogonale alle rette stesse.*

Queste proprietà, combinate con altre che esporremo in seguito, ci serviranno a mettere in piena luce i bei risultati ottenuti recentemente dal sig. WEINGARTEN *), rispetto a certe classi di superficie applicabili le une sulle altre.

VII.

Fra le varie ipotesi che si possono istituire sulla disposizione delle rette rispetto alla superficie iniziale, merita speciale attenzione quella in cui tutte le rette che incontrano una delle linee $\varphi =$ cost. fanno un angolo costante colla superficie, per modo che si abbia

$$\text{sen}\,\theta = f(\varphi).$$

In questo caso, supponendo che tutte le rette del sistema sieno normali ad una medesima superficie, si ha

$$\frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = [f(\varphi)]^2,$$

epperò, in virtù di quel che abbiamo dimostrato nell'art. IV, le trajettorie ortogonali delle linee $\varphi =$ cost. sono linee geodetiche della superficie iniziale, ossia le linee $\varphi =$ cost. sono parallele, nel senso che si è dichiarato precedentemente. Reciprocamente se, essendo costante l'angolo θ lungo ciascuna delle curve ortogonali $\Phi =$ cost., queste curve sono parallele, le rette del sistema sono tutte normali ad una medesima superficie. In-

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIX (1861), pag. 382.

fatti, supponendo che si abbia

$$U = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad V = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

risulta

$$\operatorname{sen} \theta = \mu . \varpi_\Phi ,$$

in cui ϖ_Φ esprime, in questo caso, una vera funzione di Φ, poichè le curve $\Phi =$ cost. sono, per ipotesi, parallele fra loro. Ma d'altra parte, per la costanza dell'angolo θ, si ha anche

$$\operatorname{sen} \theta = f(\Phi),$$

dunque

$$\mu = \frac{f(\Phi)}{\varpi_\Phi},$$

donde si scorge che il fattore d'integrazione è funzione del solo integrale Φ, o ciò che torna lo stesso, che l'espressione

$$U du + V dv$$

ossia

$$\mu . d \Phi$$

è un differenziale esatto a due variabili.

Come caso particolare del precedente teorema, possiamo enunciare quest'altro: *se un sistema di rette, normali ad una medesima superficie, incontra sotto un angolo costante un'altra superficie, le infinite linee che si possono tracciare su questa, normalmente a quelle rette, sono le sviluppanti geodetiche di una medesima curva, ossia hanno per trajettorie ortogonali un sistema di linee geodetiche.*

Da questo teorema, nel caso che l'angolo sia nullo, deriva spontaneamente quest'altro, conosciuto *):

Se un sistema di rette, tangenti ad una medesima superficie, è normale ad una medesima altra superficie, esso si compone delle tangenti ad una serie di linee geodetiche tracciate sulla prima superficie;

e reciprocamente:

Se si traccia sopra una superficie qualunque una serie di linee geodetiche, le rette tangenti a queste linee costituiscono il sistema delle normali ad una medesima superficie.

Si dimostra facilmente che in questo caso la prima superficie è il luogo dei centri di curvatura della seconda.

Le ultime proprietà si possono dimostrare direttamente mediante l'equazione

$$\frac{\partial (\sqrt{E} \cos \alpha)}{\partial v} = \frac{\partial (\sqrt{G} \cos \beta)}{\partial u}$$

*) Veggasi BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, § 661, 662.

stabilita nell'art. VI. Supponendo infatti che le linee $v = \text{cost.}$ sieno quelle a cui le rette sono tangenti, e supponendo inoltre $F = 0$, si avrebbe

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0,$$

e la precedente equazione si ridurrebbe alla

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

la quale esprime appunto che le linee $v = \text{cost.}$ sono geodetiche.

Si osserverà anche che nel caso attuale le linee $\varphi = \text{cost.}$ sono le trajettorie ortogonali delle geodetiche. Per tutti i punti di una di queste trajettorie la distanza t da una delle superficie ortogonali a tutte le rette è costante, perchè data dalla formola $t = \text{cost.} - \varphi$. D'altronde questa distanza è uno dei raggi di principale curvatura della superficie; abbiamo dunque la seguente proprietà *): *il raggio di principale curvatura d'una superficie è costante lungo le linee che corrispondono alle trajettorie ortogonali delle geodetiche inviluppate dalle normali, sulla superficie dei centri di curvatura relativi al raggio stesso.*

VIII.

Restituendoci nel caso generale considerato nell'art. I, supponiamo che le linee sieno rappresentate, come d'ordinario, da due sole equazioni fra le x, y, z con due parametri arbitrarii u e v, le quali supporremo ridotte alla forma:

$$u(x, y, z) = u, \qquad v(x, y, z) = v. \tag{19}$$

Poniamo per brevità

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} = P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} = Q,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = R,$$

*) Notata dal sig. WEINGARTEN, nel Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIX (l. c.). Il teorema dato dal medesimo geometra nel t. LXII dello stesso Giornale, pag. 62, è una immediata conseguenza dell'attuale.

e rappresentiamo con $dz = p\,dx + q\,dy$ l'equazione della superficie (ipotetica) che sega ortogonalmente tutte le curve (19). Si dovrà avere

$$\frac{-p}{P} = \frac{-q}{Q} = \frac{1}{R},$$

e poichè l'equazione differenziale $dz = p\,dx + q\,dy$ deve potersi integrare mediante una sola equazione fra le x, y, z, anche l'equazione

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

dovrà essere dotata della medesima proprietà. Perciò la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una superficie ortogonale alle linee (19) è

$$(20)\qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Si possono fare su questa equazione osservazioni analoghe a quelle cui diede luogo l'equazione (4).

Essa può essere trasformata con vantaggio, nel modo seguente.

Indichiamo per brevità cogli indici 1, 2, 3 le derivazioni parziali relative alle variabili x, y, z e poniamo

$$u_{11} + u_{22} + u_{33} = U,$$

$$v_{11} + v_{22} + v_{33} = V,$$

$$u_1 v_{1,r} + u_2 v_{2,r} + u_3 v_{3,r} = H_r,$$

$$v_1 u_{1,r} + v_2 u_{2,r} + v_3 u_{3,r} = K_r \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Si trova facilmente

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = Uv_1 - Vu_1 + H_1 - K_1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = Uv_2 - Vu_2 + H_2 - K_2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Uv_3 - Vu_3 + H_3 - K_3,$$

per cui osservando le relazioni identiche

$$Pu_1 + Qu_2 + Ru_3 = 0,$$

$$Pv_1 + Qv_2 + Rv_3 = 0,$$

si vede che la condizione (20) può scriversi

$$PH_1 + QH_2 + RH_3 = PK_1 + QK_2 + RK_3 .$$

Indichiamo ora con δx, δy, δz i differenziali di x, y, z relativi ad uno spostamento infinitesimo lungo la tangente alla linea che passa per il punto (x, y, z): si ha evidentemente

$$\frac{\delta x}{P} = \frac{\delta y}{Q} = \frac{\delta z}{R},$$

quindi l'equazione precedente può scriversi anche così:

$$H_1 \delta x + H_2 \delta y + H_3 \delta z = K_1 \delta x + K_2 \delta y + K_3 \delta z .$$

Se si ripongono in questa equazione i valori di H_r e K_r, si scorge immediatamente che il risultato può essere messo sotto la forma:

$$u_1 \delta v_1 + u_2 \delta v_2 + u_3 \delta v_3 = v_1 \delta u_1 + v_2 \delta u_2 + v_3 \delta u_3 , \tag{21}$$

conservando alla caratteristica δ il senso or ora dichiarato.

Questa nuova forma della condizione (20) ci sarà utile in seguito.

Se le due equazioni che definiscono il sistema non fossero sciolte rispetto ai parametri u e v, bisognerebbe sostituire nella (20) in luogo di $\frac{\partial P}{\partial x}$, ecc. le espressioni

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ ecc.,}$$

dove per $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, ecc. sarebbero da surrogarsi i valori cavati dalle due equazioni proposte. Questa operazione non presenta alcuna difficoltà, tranne la lunghezza del calcolo; ma converrà quasi sempre eseguirla in ciaschedun caso particolare.

IX.

Consideriamo le (19) come le equazioni di due superficie, per le quali u e v abbiano due valori costanti, e poniamo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = L,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = M,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = N.$$

Chiamando λ, μ, ν gli angoli che la normale alla prima superficie fa coi tre assi; λ_1, μ_1, ν_1 le quantità analoghe per la seconda, si ha

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos\mu = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\cos\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cos\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \cos\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial v}{\partial z},$$

da cui deducesi facilmente, per l'angolo ω delle due superficie, l'espressione

$$\cos\omega = \frac{M}{\sqrt{LN}}.$$

L'equazione delle linee di curvatura della prima superficie si può mettere, come è noto, sotto la forma:

$$(\cos\nu\, dy - \cos\mu\, dz) d\cos\lambda + (\cos\lambda\, dz - \cos\nu\, dx) d\cos\mu + (\cos\mu\, dx - \cos\lambda\, dy) d\cos\nu = 0.$$

Da quest'equazione e dalla

$$\cos\lambda . d\cos\lambda + \cos\mu . d\cos\mu + \cos\nu . d\cos\nu = 0$$

si deduce

$$\frac{d\cos\lambda}{dx} = \frac{d\cos\mu}{dy} = \frac{d\cos\nu}{dz} \quad *),$$

ossia, ponendo per $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ i valori precedenti e indicando con I un fattore indeterminato,

$$L\,du_1 - \tfrac{1}{2}u_1\,dL = I\,dx,$$

$$L\,du_2 - \tfrac{1}{2}u_2\,dL = I\,dy,$$

$$L\,du_3 - \tfrac{1}{2}u_3\,dL = I\,dz.$$

A queste equazioni, che sono in sostanza solamente due, si possono surrogar quelle che si ricavano da esse moltiplicandole ordinatamente prima per u_1, u_2, u_3, poi per v_1, v_2, v_3 e sommando ciascuna volta. Il primo risultato è una identità; il secondo è

$$L(v_1\,du_1 + v_2\,du_2 + v_3\,du_3) = \tfrac{1}{2}M\,dL + I\,dv,$$

*) Le equazioni delle linee di curvatura furono date per la prima volta sotto questa forma utilissima dal sig. O. RODRIGUES nella Correspondance sur l'École polytechnique, t. III (1816), pag. 163.

dove i differenziali si riferiscono sempre a variazioni lungo una linea di curvatura della prima superficie.

Se questa linea di curvatura fosse l'intersezione delle due superficie, si avrebbe lungo essa $dv = 0$; quindi l'equazione

$$L(v_1 \delta u_1 + v_2 \delta u_2 + v_3 \delta u_3) = \tfrac{1}{2} M \delta L \tag{22}$$

esprime la condizione perchè l'intersezione delle due superficie sia linea di curvatura della prima di esse; purchè i differenziali δ s'intendano riferiti ad una variazione lungo la curva d'intersezione.

Analogamente l'equazione

$$N(u_1 \delta v_1 + u_2 \delta v_2 + u_3 \delta v_3) = \tfrac{1}{2} M \delta N \tag{23}$$

esprime la condizione perchè la stessa linea d'intersezione sia linea di curvatura della seconda superficie, ritenendo sempre per δ il significato anzidetto.

Quando le due equazioni (22), (23) sono simultaneamente soddisfatte, la linea di intersezione delle due superficie è linea di curvatura tanto dell'una quanto dell'altra. In questo caso si può dedurre facilmente da quelle equazioni un elegante teorema di TERQUEM *). Sommandole dopo averle rispettivamente divise per LM, MN si trova

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta L}{L} + \frac{\delta N}{N}\right)$$

ossia

$$\delta\left(\log \frac{M}{\sqrt{LN}}\right) = 0.$$

In virtù del significato di δ, questa equazione esprime che la quantità $\frac{M}{\sqrt{LN}}$, ossia l'angolo ω delle due superficie, è costante in tutti i punti della loro comune intersezione. Questo teorema, di cui il sig. BRIOSCHI ha dato una bella dimostrazione analitica **), si può stabilire anche geometricamente, come può vedersi nelle mie ricerche: *Sulla teoria delle sviluppoidi* ***).

Si può osservare che le equazioni (22), (23) possono scriversi nel modo seguente:

---

*) Enunciato a pag. 402 del t. XI (1852) dei Nouvelles Annales de Mathématiques.

**) Annali di scienze matematiche e fisiche (di TORTOLINI), t. IV (1853), pag. 129. La dimostrazione precedente non differisce sostanzialmente da quella di BRIOSCHI.

***) Annali di Matematica pura ed applicata, t. IV (1861), nota a pag. 274; oppure queste Opere, vol. I, pag. 26.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \delta u_1 & \delta u_2 & \delta u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \delta v_1 & \delta v_2 & \delta v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si possono anche eliminare intieramente dalle suddette equazioni i differenziali δ, e ridurle fra sole quantità finite. Osserviamo per ciò che, ricordando il significato delle lettere P, Q, R (art. prec.), si ha

$$\delta x = \varkappa P, \qquad \delta y = \varkappa Q, \qquad \delta z = \varkappa R,$$

dove $\varkappa$ rappresenta un opportuno fattore: qualunque sia la funzione Ψ si ha dunque

$$\delta \Psi = \varkappa(\Psi_1 P + \Psi_2 Q + \Psi_3 R).$$

In base a ciò le (22), (23) si trasformano facilmente nelle seguenti:

$$L(PK_1 + QK_2 + RK_3) = \tfrac{1}{2}M(PL_1 + QL_2 + RL_3),$$

$$N(PH_1 + QH_2 + RH_3) = \tfrac{1}{2}M(PN_1 + QN_2 + RN_3),$$

nelle quali non entra più alcun differenziale.

Supponiamo che i due sistemi di superficie rappresentati dalle (19), quando le u, v sono parametri arbitrarii, sieno ortogonali. Si avrà identicamente

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0,$$

e quindi anche

$$(24) \qquad u_1 \delta v_1 + u_2 \delta v_2 + u_3 \delta v_3 = -(v_1 \delta u_1 + v_2 \delta u_2 + v_3 \delta u_3),$$

qualunque sia la variabile cui si riferisce la caratteristica δ. Ora, se questi due sistemi di superficie sono segati ortogonalmente da un terzo sistema, questo deve evidentemente segare ad angolo retto anche tutte le curve d'intersezione fra le superficie dei due primi, e quindi dev'essere soddisfatta l'equazione (21). In virtù dunque di questa e della (24) si avranno le due identità

$$u_1 \delta v_1 + u_2 \delta v_2 + u_3 \delta v_3 = 0, \qquad v_1 \delta u_1 + v_2 \delta u_2 + v_3 \delta u_3 = 0.$$

Ma avendosi, per ipotesi, $M = 0$, le due condizioni (22), (23) si riducono semplicemente alle due precedenti, epperò risultano soddisfatte identicamente pel semplice fatto dell'ortogonalità dei tre sistemi. Con ciò è dimostrato che ogni intersezione di due su-

perficie dei due primi sistemi è una linea di curvatura dell'una e dell'altra superficie; ed è evidente che la stessa dimostrazione si applica anche alle restanti intersezioni.

Otteniamo in questo modo una nuova dimostrazione del celebre teorema di Dupin sui sistemi tripli di superficie ortogonali.

Al teorema di Terquem, precedentemente dimostrato, ne corrisponde un altro che può riguardarsi come il suo reciproco, e che non è stato, io credo, osservato finora. Esso può enunciarsi così: *se i piani tangenti comuni a due superficie, toccano tanto l'una quanto l'altra nei punti di due loro linee di curvatura, la distanza dei punti corrispondenti di queste linee è costante.* (Chiamo punti corrispondenti quelli che si trovano nello stesso piano tangente comune).

Infatti, la retta che congiunge due punti corrispondenti è, per la nota teoria delle tangenti conjugate, normale alle due linee di curvatura; d'altronde essa è una generatrice della superficie sviluppabile inviluppata dai piani tangenti comuni alle due superficie: dunque le due linee di curvatura sono trajettorie ortogonali delle generatrici di questa superficie, epperò la porzione di generatrice intercetta fra esse è costante.

Questa dimostrazione rende manifesta la verità del teorema reciproco: *se i piani tangenti comuni a due superficie toccano l'una di queste secondo una linea di curvatura, e se inoltre è costante la distanza dei punti corrispondenti delle due linee di contatto, anche la seconda di queste linee è linea di curvatura della superficie su cui è tracciata.*

Come casi particolari noteremo i seguenti due teoremi:

Se i piani tangenti ad una superficie lungo una sua linea di curvatura sono tangenti in pari tempo ad una sfera, la linea di curvatura è sferica. [Se si suppone che la sfera si riduca ad un punto, si ottiene un teorema di cui fece già uso Joachimsthal nello studio di certe superficie *). Il qual ultimo teorema presenta una tal qual reciprocità con un altro notissimo dello stesso Joachimsthal **), come il teorema più generale la presenta con uno del sig. J. A. Serret ***)].

Reciprocamente: *se i piani tangenti comuni ad una sfera e ad una superficie data toccano questa superficie in punti equidistanti dai corrispondenti punti di contatto colla sfera, il luogo dei detti punti è una linea di curvatura della superficie ed è altresì una linea sferica.*

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIV (1857), pp. 183-184. Le proprietà di queste superficie erano già state dimostrate analiticamente da Joachimsthal nel *Mémoire sur les surfaces courbes* (Berlino, 1848).

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXX (1846), pag. 348: il teorema in discorso è attribuito a Lancret dal sig. O. Bonnet.

***) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVIII (1853), pag. 1.

Questo teorema può esser utile nella ricerca delle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche.

Il seguente teorema deducesi facilmente dal citato teorema del sig. J. A. SERRET.

Se una linea di curvatura è sferica, i piani tangenti alla superficie, nei punti di questa linea, sono tangenti ad una medesima sfera.

X.

La teoria dei sistemi di rette distribuite nello spazio, della quale ci siamo occupati in alcuni dei precedenti articoli, può considerarsi sotto due aspetti assai differenti, fra i quali, per quanto ci sembra, non fu sempre fatta una distinzione così esplicita come si conveniva.

Si può infatti supporre che i coseni X, Y, Z sieno funzioni delle *tre* coordinate del punto di partenza, considerate come variabili *indipendenti*: e in questo caso si ottiene un sistema che potrebbesi chiamare *complesso*, giacchè per ciascun punto dello spazio passa un numero *infinito* di rette, generatrici di una superficie conica. Sieno infatti

$$(25)\qquad \frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z},$$

le equazioni di una di queste rette, in cui ξ, η, ζ rappresentano le coordinate correnti, x, y, z quelle del suo punto di partenza. Se consideriamo ξ, η, ζ come costanti, le *due* equazioni precedenti sono soddisfatte dalle coordinate x, y, z dei punti di partenza di tutte le rette che passano per il punto dato (ξ, η, ζ); dunque il luogo geometrico di questi punti è una *linea continua*, che passa per il punto stesso.

Questo caso fu già considerato da MALUS *), il quale osservò che fra i punti circonvicini a quello donde esce una data retta del sistema, ve ne sono alcuni dai quali escono altre rette che incontrano la data in qualche punto (o meglio le cui minime distanze da quella sono d'ordine superiore al primo), e che il luogo geometrico di questi punti è una superficie conica di 2° ordine, di cui la retta data è una generatrice. Ciò dimostrasi facilmente rappresentando con t il valor comune dei tre rapporti (25) e differenziando le tre equazioni risultanti nell'ipotesi $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$; si ha

*) *Mémoire sur l'optique*, nel t. VII del Journal de l'École Polytechnique, pag. 1. Questo teorema può dedursi da quello di MONGE, come ha osservato il signor CHASLES, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LII (1861), pag. 1017.

infatti così:

$$dx + X dt + t dX = 0,$$

$$dy + Y dt + t dY = 0,$$

$$dz + Z dt + t dZ = 0,$$

da cui eliminando t e dt si ottiene

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0,$$

equazione omogenea e del 2° grado rispetto a dx, dy, dz, che è soddisfatta da $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$, donde il teorema.

Lo stesso argomento fu trattato recentemente dal signor A. TRANSON *), il quale dimostrò che si può sempre, ed in infinite maniere, decomporre il sistema generale in sistemi parziali di rette normali ad una superficie; e l'equazione che governa siffatta decomposizione esprime una condizione cui debbono soddisfare le superficie luoghi dei punti di partenza delle rette appartenenti a ciascun sistema parziale, mentre i coseni X, Y, Z restano formati in un modo completamente arbitrario con x, y, z.

Si può invece restringere la ricerca, come abbiam fatto nei precedenti articoli, ai sistemi *semplici* di rette, cioè a quei sistemi nei quali per ciascun punto dello spazio non passa, in generale, che una sola retta od un numero limitato di rette. Ciò equivale a riguardare x, y, z, X, Y, Z, come funzioni di *due* variabili indipendenti, cioè a supporre che le varie rette partano, non già da ciascun punto dello spazio, ma solamente dai punti di una certa superficie, la cui natura dipende da quella delle funzioni x, y, z, e che può essere scelta ad arbitrio, purchè si determinino convenientemente queste funzioni. In questo caso l'esistenza di una superficie ortogonale impone una condizione alle funzioni x, y, z e non alla superficie iniziale, poichè sebbene la natura di questa influisca sulla forma di quelle funzioni, pure essa non modifica punto la distribuzione del sistema, col quale non ha che una relazione accidentale.

Questo secondo genere di quistioni recentemente trattato dal signor KUMMER **), fu studiato primieramente da MONGE ***), le cui ammirabili scoperte sono state poscia

*) Journal de l'École Polytechnique, t. XXII, cahier 38 (1861), pag. 195.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LVII (1860), pag. 189.

***) Mémoires de l'Académie des Sciences, pour 1781: *Mémoire sur les déblais et les remblais*, art. XIX-XXXIII.

completate e messe nella maggior luce dalle belle ricerche del signor BERTRAND *) e da alcune ingegnose osservazioni dell'illustre STURM **).

Si potrebbe, per verità, anche in questo secondo caso, riguardare X, Y, Z come funzioni di x, y, z, salvo il tener conto dell'equazione della superficie iniziale; ma questo metodo è poco vantaggioso nella ricerca della condizione d'esistenza di una superficie ortogonale ***).

Fra le due classi di problemi che abbiamo or ora accennato esiste un caso di transizione; ed è quello in cui i coseni X, Y, Z sono tali funzioni di x, y, z che il sistema determinato da esse, apparentemente complesso, si riduce in realtà ad un sistema semplice. Nei seguenti articoli vogliamo esaminare questo caso singolare.

XI.

Affinchè questo caso si verifichi, bisogna evidentemente che il luogo dei punti di partenza di tutte le rette che passano per il punto qualunque (ξ, η, ζ), luogo rappresentato dalle equazioni (25), e passante per il punto (ξ, η, ζ), si riduca ad una retta. Ora indicando con t la distanza da questo punto al punto (x, y, z), da cui parte una

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. IX (1844), pag. 133.

**) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XX (1845), pag. 1239 e seguenti, nella parte analitica del *Mémoire sur la vision*.

***) Nell'effettuare questa ricerca il signor DIEU [Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XI (1852), pag. 70] è caduto in un equivoco che fu avvertito dal signor A. TRANSON [Nouvelles Annales de Mathématiques (2me série), t. II (1863), pag. 138]. A noi sembra però che una parte del disaccordo fra i due autori si spieghi colla differente interpretazione ch'essi danno all'enunciato del problema, enunciato il quale non è infatti scevro da ambiguità.

Nel secondo dei citati articoli (pag. 140) il signor TRANSON fa uso di una certa proprietà del fattore d'integrazione d'un differenziale a tre variabili. Questa proprietà non è che un caso particolare d'un'altra assai generale e pressochè intuitiva, la quale consiste in ciò che « un'equazione alle derivate parziali lineare ed omogenea, cioè della forma:

$$P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0, \qquad [P_r = \text{funz.}(x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi)]$$

non può avere più di $n - 1$ soluzioni indipendenti ». Ciò deducesi immediatamente dallo stesso metodo d'integrazione di LAGRANGE, ma risulta anche da ciò che il Jacobiano di n soluzioni distinte è nullo in virtù dell'equazione proposta, per cui queste n soluzioni non possono essere indipendenti. Nel caso considerato dal signor TRANSON le funzioni μ ed F soddisfanno ad un'equazione della forma indicata, alla quale soddisfà pure l'integrale U per la proporzionalità di X, Y, Z a $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$: dunque una di queste tre funzioni deve esser funzione delle altre due.

delle rette in discorso, si ha

$$\xi = x + tX, \qquad \eta = y + tY, \qquad \zeta = z + tZ, \tag{26}$$

e se queste equazioni si suppongono risolute rispetto ad x, y, z (di cui sono funzioni date le X, Y, Z), si avranno le coordinate dei punti da cui escono le infinite rette passanti per il punto (ξ, η, ζ), espresse per la variabile indipendente t. La direzione della tangente alla linea luogo geometrico di questi punti si otterrà dunque per mezzo delle formole

$$0 = \frac{dx}{dt} + X + t\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

$$0 = \frac{dy}{dt} + Y + t\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

$$0 = \frac{dz}{dt} + Z + t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right);$$

ma se la linea si riduce ad una retta, essendo t la lunghezza di questa retta, e la direzione di essa dovendo coincidere con quella della retta del sistema passante pel punto (ξ, η, ζ), si avrà, vista la direzione in cui si sono contate le t,

$$\frac{dx}{dt} = -X, \qquad \frac{dy}{dt} = -Y, \qquad \frac{dz}{dt} = -Z;$$

epperò dalle equazioni precedenti si dedurranno le condizioni

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0,$$

le quali esprimono che i coseni X, Y, Z, relativi alle rette passanti pel punto (ξ, η, ζ), non dipendono punto da t; ciò che è evidente, ed avrebbe potuto servire come punto di partenza, giacchè se la linea direttrice della superficie conica (che passa già pel suo vertice) riducesi ad una retta, tutte le generatrici devono sovrapporsi l'una all'altra.

Eliminando le $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, si perviene così alle condizioni cercate

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} X\frac{\partial X}{\partial x}+Y\frac{\partial X}{\partial y}+Z\frac{\partial X}{\partial z}&=0,\\ X\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial Y}{\partial y}+Z\frac{\partial Y}{\partial z}&=0,\\ X\frac{\partial Z}{\partial x}+Y\frac{\partial Z}{\partial y}+Z\frac{\partial Z}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right.$$

Osserviamo che se, in luogo del punto (ξ, η, ζ), si considerasse il punto $(\xi + t_0 X, \eta + t_0 Y, \zeta + t_0 Z)$, appartenente alla retta che passa per il primo punto, le equazioni analoghe alle (26), per il secondo punto, non differirebbero dalle prime che per il cambiamento di t in $t - t_0$. Ora poichè, supponendo soddisfatte le condizioni (27), i coseni X, Y, Z espressi per ξ, η, ζ sono indipendenti da t, è chiaro che i valori dei coseni stessi non varieranno, quando si sostituisca $\xi + t_0 X$, $\eta + t_0 Y$, $\zeta + t_0 Z$ al posto di ξ, η, ζ. Con ciò rendesi pienamente ragione del come accada che il sistema di rette, benchè dipendente da *tre* parametri, riducasi non pertanto ad un sistema semplice.

Notiamo che le equazioni (27) equivalgono a due sole realmente distinte, perchè se si moltiplicano rispettivamente per X, Y, Z e si sommano, si ottiene un risultato identicamente nullo, in virtù delle derivate dell'equazione $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Sottraendo queste derivate dalle precedenti equazioni, si ottengono le equivalenti

$$Y\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=Z\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

$$Z\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=X\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=Y\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

alle quali si possono sostituire le due seguenti:

$$(28)\qquad \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}}{X}=\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial z}}{Y}=\frac{\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{Z};$$

a meno che non si abbiano simultaneamente le tre relazioni

$$(29)\qquad \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

Consideriamo dapprima questo secondo caso.

Quand'esso si verifica, l'equazione (10) dell'art. II è soddisfatta indipendentemente dalla funzione F: dunque le rette del sistema corrispondente sono normali ad una medesima superficie. Inoltre le equazioni (29) esprimono evidentemente che X, Y, Z sono le derivate parziali di una stessa funzione φ di x, y, z. Questa funzione è tale che soddisfà all'equazione

$$(30) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

e che, eguagliata ad una costante arbitraria, definisce la serie delle superficie ortogonali alle rette del sistema. Siccome queste superficie sono parallele fra loro, così i valori delle derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ non cambiano quando il punto (x, y, z) si muove lungo una normale, cioè quando le coordinate x, y, z si mutano in $x + tX$, $y + tY$, $z + tZ$: il che conferma quanto abbiamo osservato al principio. Del resto questo parallelismo, che noi deduciamo *a priori* dalla natura della quistione, si può stabilire in modo diretto come segue. Rappresentiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto d'incontro della normale alla superficie $\varphi = \text{cost.}$, nel punto (x, y, z), colla superficie $\varphi = 0$, e con n la distanza di questi due punti; avremo, per la (30),

$$x - x_0 = n\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad y - y_0 = n\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad z - z_0 = n\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

da cui

$$(x - x_0)\delta x + (y - y_0)\delta y + (z - z_0)\delta z = n\,\delta\varphi,$$

riferendo la caratteristica δ ad uno spostamento nel senso della normale n. Ma d'altra parte si ha anche

$$(x - x_0)\delta x + (y - y_0)\delta y + (z - z_0)\delta z = n\,\delta n$$

dunque $\delta\varphi = \delta n$, ed, integrando lungo la normale, $\varphi = n$, poichè n deve annullarsi per $\varphi = 0$. Questo risultato si può enunciare dicendo che: *se φ è una soluzione qualunque dell'equazione* (30), *il valore che questa funzione riceve per un certo sistema di valori (x', y', z') delle variabili x, y, z, misura la distanza della superficie*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x', y', z')$$

dalla superficie

$$\varphi(x, y, z) = 0;$$

donde consegue che tutte le superficie contenute nell'equazione $\varphi = \text{cost.}$ sono parallele fra loro *). Ora qualunque sia la superficie iniziale da cui escono le rette (X, Y, Z), se

---

*) L'equazione (30), che definisce il parallelismo delle superficie, fu data da BORDONI, nella Memoria citata all'art. IV.

si prende su ciascuna di esse, partendo da questa superficie, la lunghezza t data dall'equazione

$$t + \varphi = \text{cost.},$$

si ottiene, in virtù dell'equazione (3) dell'art. I, una superficie ortogonale a tutte le rette. Questo fatto è, nel caso attuale, reso evidente da quanto precede, poichè φ esprime, in ciascun punto della superficie iniziale, la distanza da questo punto alla superficie $\varphi = 0$, misurata normalmente a quest'ultima; dunque il luogo degli estremi dei segmenti uguali ad $a - \varphi$ è la superficie $\varphi = a$, qualunque sia la superficie iniziale.

Questi risultati si accordano pienamente con quelli che il Sig. BAEHR ha dedotti da altre considerazioni *).

XII.

Passiamo ora al caso più generale, ed osserviamo anzitutto che, per essere $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, il valore comune dei tre rapporti (28) è eguale a quello dell'espressione

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

la quale non potrebbe quindi annullarsi senza che si ricadesse nel caso già trattato. Dunque l'equazione $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ non ammette, pei nostri sistemi, un integrale unico che quando il suo primo membro è un differenziale esatto a tre variabili.

Procediamo all'integrazione delle equazioni (28), o delle (27) che ne possono tener luogo.

Per ciò supponiamo per un momento che si conosca il sistema dei valori generali delle funzioni incognite X, Y, Z, e consideriamo l'equazione a derivate parziali

$$X\frac{\partial \Theta}{\partial x} + Y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + Z\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \tag{31}$$

È noto che per trovare la soluzione generale di quest'equazione, bisogna integrare le equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \tag{32}$$

Sieno

$$u(x, y, z) = u, \qquad v(x, y, z) = v$$

*) Nouvelles Annales de Mathématiques, (2me série), t. II (1863), pag. 35.

i due integrali completi di queste equazioni, risoluti rispetto alle costanti arbitrarie u e v. Si avrà

$$\Theta = \Theta(u, v),$$

indicando con $\Theta(u, v)$, una funzione arbitraria di u e v. Ora le X, Y, Z debbono soddisfare a tre equazioni in tutto simili alla (31), per cui esse dovranno avere la forma:

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v),$$

colla condizione $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Ne risulta che queste tre funzioni sono rese costanti dagli integrali delle (32), e che quindi nell'integrazione di queste equazioni si possono riguardare come tali: perciò rappresentando col differenziale di una nuova variabile t il valor comune dei tre rapporti (32), si otterrà

$$x = x_1 + tX, \qquad y = y_1 + tY, \qquad z = z_1 + tZ,$$

dove x_1, y_1, z_1 sono funzioni arbitrarie delle u, v riguardate come costanti nell'integrazione. Eliminando t fra queste equazioni, ricavando dalle risultanti

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z} \tag{33}$$

i valori di u, v (di cui sono funzioni x_1, y_1, z_1, X, Y, Z) espressi per x, y, z e sostituendoli nelle X, Y, Z, si otterranno per queste funzioni i richiesti valori generali, soddisfacenti alle condizioni del problema. Osserviamo che nelle equazioni (33) si possono sostituire alle funzioni X, Y, Z, tre funzioni intieramente arbitrarie di u e v, X_1, Y_1, Z_1, purchè si prenda poscia

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \qquad Y = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \qquad Z = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}.$$

Il risultato a cui siamo giunti si può rendere manifesto anche geometricamente. Infatti se il sistema di rette che si considera, riducesi ad un sistema *semplice*, possiamo supporre che ciascuna delle rette che lo compongono parta da un punto della superficie iniziale arbitraria

$$x = x_1(u, v), \qquad y = y_1(u, v), \qquad z = z_1(u, v),$$

per cui i coseni corrispondenti si possono riguardare come funzioni delle sole u, v. Le equazioni della retta generica sono, in quest'ipotesi, le stesse (33). Se da queste equazioni caviamo i valori di u, v in funzione di x, y, z e li riponiamo nei coseni

X, Y, Z, avremo questi coseni espressi per le coordinate di un punto qualunque della retta, e queste espressioni, pel modo stesso in cui furono ottenute, rimarranno evidentemente invariate qualunque sia il punto che si prende sulla retta, vale a dire non cangieranno valore quando x, y, z diventeranno $x + tX$, $y + tY$, $z + tZ$. Otterremo dunque un sistema nel quale, sebbene entrino i tre parametri indipendenti x, y, z, pure non passerà che una sola retta, od un numero limitato di rette, per ogni punto dello spazio.

Da queste considerazioni risulta manifestamente che le equazioni (27) o (28) non impongono alcuna speciale condizione geometrica ai sistemi *semplici* di rette che se ne ricavano: esse non determinano che la forma delle funzioni da cui sono definiti questi sistemi, quando vengono considerati come *complessi*.

Osserveremo per ultimo, che il numero delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione è solamente in apparenza maggiore di quello che la teoria richiede: non l'abbiamo ridotto al minimo, per conservare la simmetria delle formole; del che ognuno potrà facilmente convincersi. Il problema trattato è un caso particolare del seguente: « Trovare i valori generali delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ che soddisfanno alle m equazioni a derivate parziali

$$P_1 \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots m),$$

in cui i coefficienti $P_1, P_2, \ldots P_n$, *eguali in tutte le equazioni*, sono funzioni qualisivogliano delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ e delle funzioni cercate $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ ». La risoluzione di questo problema, quale risulta dalla teoria generale e dalle considerazioni usate precedentemente, consiste nel trovare gli $n - 1$ integrali completi

$$f_r(x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n-1)$$

del sistema d'equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n},$$

in cui le quantità $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, si devono considerare come costanti; nell'egualiare queste quantità ad altrettante funzioni arbitrarie delle costanti d'integrazione u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$, e nel sostituire in queste funzioni stesse i valori ricavati per queste costanti dalle $n - 1$ equazioni integrali, nelle quali esse entrano tanto esplicitamente, quanto implicite nelle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$. È chiaro che questa soluzione contiene il debito numero di funzioni arbitrarie.

XIII.

Le superficie si possono considerare sotto due aspetti assai differenti, cioè o come limiti di solidi, o come solidi flessibili ed inestendibili, una delle cui dimensioni si riguardi come evanescente *).

Quando si adotta questo secondo punto di vista, le proprietà delle superficie vengono a dividersi in due classi: l'una comprende quelle proprietà che sono essenzialmente connesse colla forma speciale che si attribuisce attualmente alla superficie considerata, e che si modificano insieme con essa; all'altra classe appartengono invece quelle proprietà che sussistono indipendentemente da ogni particolare determinazione della forma stessa. Queste ultime possono chiamarsi *assolute*, le prime *relative*. Così, a cagion d'esempio, il celebre teorema di Gauss, relativo alla *conservazione della curvatura*, esprime una proprietà *assoluta* la quale, e per la generalità di cui è dotata, e per la vastità delle ricerche a cui apre la via, merita certamente di essere riguardata come una delle più importanti conquiste dell'analisi moderna.

Allorchè si considerano le superficie sotto questo secondo aspetto, l'ordinaria rappresentazione cartesiana rendesi poco opportuna, siccome quella che è troppo intimamente connessa colla posizione e colla figura attuale della superficie. Quando questa viene considerata come flessibile ed inestendibile, ciò che rimane inalterato è la lunghezza di ciascun elemento lineare, e tutte le proprietà assolute non possono essere che conseguenze di questa inalterabilità. Quindi, nell'ordine delle ricerche di cui vogliamo ora occuparci, la superficie è perfettamente definita dall'espressione del suo elemento lineare, il cui quadrato ha la forma

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{34}$$

ed in cui le E, F, G hanno il significato con cui si sono già usate nell'art. III. Le due indeterminate u e v, che fanno l'ufficio di variabili indipendenti, sono denominate *coordinate curvilinee* perchè, come è notissimo, possono riguardarsi come i parametri di due famiglie di curve tracciate sulla superficie, dall'intersezione delle quali vengono individuati i punti della superficie stessa.

Tutte quelle superficie il cui elemento lineare è rappresentato dalla medesima espressione (34) sono riguardate, nel presente ordine di ricerche, come identiche fra loro. Ma non sussiste la proprietà reciproca: le tre funzioni E, F, G possono essere

---

*) Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XIII.

Casorati, *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* [Annali di Matematica pura ed applicata, t. III (1860), pag. 363, t. IV (1861), pag. 177].

formate in infiniti modi diversi con due variabili indipendenti, senza che le superficie definite dalle corrispondenti espressioni (34) sieno perciò necessariamente distinte fra loro. È chiaro infatti che se nell'espressione (34) si surrogano alle u, v due funzioni arbitrarie di due nuove variabili u', v', l'espressione risultante, riducibile sempre alla forma

$$E'du'^2+2F'du'dv'+G'dv'^2, \tag{34'}$$

è atta, non meno della prima, a definire la superficie originaria (e per conseguenza anche tutte quelle che se ne possono dedurre mediante semplici flessioni), giacchè la trasformazione che si è effettuata sulle variabili equivale all'assunzione di un nuovo sistema di coordinate curvilinee.

Per poter dunque giudicare se due espressioni della forma (34), (34') appartengano ad una medesima superficie o, ciò che torna lo stesso, a due superficie sovrapponibili l'una all'altra, bisogna cercare se sia possibile istituire fra le u, v, u', v' due relazioni tali, che in virtù di esse l'una espressione si trasformi identicamente nell'altra. Ed è manifesto che le condizioni di questa possibilità devono equivalere, geometricamente, all'eguaglianza di certe proprietà assolute delle due superficie, in numero necessario e sufficiente a determinarne l'identità. Di qui si scorge quanto sia importante la conoscenza di queste proprietà, per la risoluzione dei problemi che si presentano nella teoria delle superficie flessibili.

Ora l'espressione analitica di queste proprietà assolute deve evidentemente essere somministrata da formole, in cui entrino quelle sole quantità che compajono nell'espressione dell'elemento lineare della superficie, cioè le u, v, E, F, G e le derivate delle E, F, G rispetto alle u, v; e se quell'espressione è la più generale possibile, cioè se le linee coordinate $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ sono del tutto indeterminate, quelle formole, dovendo essere indipendenti dalla scelta delle coordinate stesse, debbono conservare la medesima forma qualunque sia il significato geometrico attribuito alle variabili. Dunque ogni formola che esprime una proprietà assoluta dev'esser tale che, sostituendo alle variabili u, v due funzioni *arbitrarie* di due nuove variabili u', v', essa si trasformi in un'altra formola, nella quale entrino le u', v', E', F', G' e le derivate delle E', F', G' rispetto alle u', v' nello stesso modo in cui nella prima entravano le u, v, E, F, G e le derivate delle E, F, G rispetto alle u, v. Ora è facile provare, innanzi tutto, che tali formole o funzioni non possono contenere le u, v esplicitamente. Infatti se

$$f\left(u,\ v,\quad E,\ F,\ G,\quad \frac{\partial E}{\partial u},\quad \frac{\partial E}{\partial v},\quad \ldots\right)$$

fosse una di queste funzioni, ponendo $u=u'+a$, $v=v'+b$, ed osservando che $\frac{\partial E'}{\partial u'}=\frac{\partial E}{\partial u}$, ecc., si troverebbe quale funzione trasformata

$$f\left(u'+a,\quad v'+b,\quad E',\, F',\, G',\quad \frac{\partial E'}{\partial u'},\quad \frac{\partial E'}{\partial v'},\quad \ldots\right),$$

la cui composizione non è identica a quella della primitiva, per la presenza delle costanti arbitrarie a, b, le quali non possono sparire in niun modo, a meno che non si suppongano mancanti le u, v. Da ciò concludiamo intanto che ogni formola rappresentatrice di una proprietà assoluta è formata solamente colle E, F, G e colle loro derivate parziali *).

Ma il concetto di queste funzioni, che si possono chiamare *assolute* come le proprietà geometriche che rappresentano, è suscettibile di un'utile estensione. Consideriamo, oltre le E, F, G, altre funzioni φ, ψ, ... di u, v, e supponiamo che quello stesso cambiamento di variabili, il quale trasforma l'espressione (34) nella (34'), trasformi parimente le φ, ψ, ... nelle φ', ψ', ... Un'espressione formata colle E, F, G, φ, ψ, ... e colle loro derivate parziali rispetto alle u, v si dirà *invariabile* quando, per l'anzidetto cambiamento di variabili, essa si trasformerà in un'espressione formata analogamente colle E', F', G', φ', ψ', ... e colle loro derivate parziali rispetto alle u', v'.

È facile concepire di qual natura sieno le proprietà geometriche che corrispondono a queste nuove espressioni. Se si eguagliano le funzioni φ, ψ, ... ad altrettante costanti od a parametri arbitrarii, si ottengono le equazioni di certe curve o di certi sistemi di curve tracciate sulla superficie: ora le proprietà rappresentate da quelle espressioni sono di tal natura, che non vengono punto modificate dai cambiamenti di forma di cui la superficie data è suscettibile, sebbene poi dipendano dalle curve φ, ψ, ...; ossia sono relazioni geometriche che hanno luogo fra queste curve, indipendentemente dalla natura delle linee coordinate.

Se le funzioni φ, ψ, ... fossero *assolute*, è chiaro che ogni funzione *invariabile* formata con esse fornirebbe una nuova funzione assoluta. È appunto in ciò che risiede, a nostro avviso, l'utilità delle funzioni invariabili, la cui ricerca sembra presentare minori difficoltà di quella delle funzioni assolute.

Il criterio che ci servirà per riconoscere le funzioni invariabili, quando esse non saranno l'immediata traduzione analitica di proprietà geometriche indipendenti dalla forma della superficie, è semplicissimo. Ogni volta che, considerando una superficie come riferita a due differenti sistemi di coordinate curvilinee (u, v), (u', v'), perverremo ad una eguaglianza fra due espressioni, in una delle quali entrino solamente le quantità E, F, G, φ, ψ, ... e le loro derivate rispetto alle u, v, nell'altra solamente le E', F', G', φ', ψ', ... e le loro derivate rispetto alle u', v', *senza che vi sia traccia*

---

*) L'idea di considerare e di cercare direttamente queste funzioni, partendo dalla loro proprietà caratteristica, è dovuta al sig. CASORATI. Si vegga la citata Memoria.

delle relazioni che passano fra i due sistemi di variabili, saremo certi che ciascuna di queste espressioni è *invariabile.* Se le coordinate u, v, del pari che le u', v', sono assunte ad arbitrio, è chiaro che i due membri dell'eguaglianza anzidetta devono essere identici nella forma. Questa circostanza non si verificherà, quando quelle variabili corrisponderanno a speciali sistemi di coordinate, ma si potrà sempre inferire legittimamente dall'eguaglianza delle due espressioni, che esse sono funzioni invariabili equivalenti.

Se poi nell'eguaglianza mancassero le funzioni φ, ψ, ... e non s'avessero che le sole E, F, G colle loro derivate, si dovrà concludere che i due membri sono funzioni *assolute,* le quali, ciascuna nel rispettivo sistema di coordinate, esprimono una medesima proprietà geometrica, che sussiste in ogni punto della superficie, indipendentemente da qualunque flessione di questa.

XIV.

Noi possiamo già fin d'ora citare due funzioni invariabili di prim'ordine, che ci sono offerte da considerazioni geometriche semplicissime. L'una di esse contiene un solo *argomento* od una sola funzione arbitraria φ, ed è quella che abbiamo denominata *parametro differenziale di prim'ordine* della funzione stessa: il suo quadrato si ottiene formando coll'argomento φ l'espressione

$$\frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

che indicheremo col simbolo $(\Delta_1 \varphi)^2$, già introdotto dal sig. LAMÉ. L'altra contiene due argomenti o due funzioni arbitrarie φ e ψ, e si ricava facilmente dalla considerazione dell'angolo di due curve, angolo il quale si mantiene evidentemente inalterato, in ogni flessione della superficie su cui le curve sono tracciate. Ponendo infatti

$$\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2} = \nabla \varphi \psi,$$

e denotando con ω l'angolo delle due curve $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$, si ha

$$\nabla \varphi \psi = -(\Delta_1 \varphi).(\Delta_1 \psi) \cos \omega,$$

donde si vede che l'invariabilità di ω, $\Delta_1 \varphi$ e $\Delta_1 \psi$ trae seco necessariamente quella di $\nabla \varphi \psi$. Reciprocamente l'invariabilità di $\nabla \varphi \psi$ trae seco quella di $\Delta_1 \varphi$, il cui quadrato si ottiene ponendo $\varphi = \psi$. Inoltre dalla moltiplicazione delle forme quadratiche si deduce

$$(\Delta_1 \varphi)^2 (\Delta_1 \psi)^2 - (\nabla \varphi \psi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \frac{1}{EG - F^2},$$

donde risulta che la funzione

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{35}$$

è anch'essa invariabile. Questa funzione non è indipendente, potendo esprimersi colle Δ_1, ∇, ma in causa della sua semplicità è utile considerarla come una funzione distinta.

Applicando a queste tre funzioni le considerazioni esposte nell'articolo precedente possiamo stabilire i seguenti teoremi:

Se φ *è una funzione assoluta della superficie il cui elemento lineare è rappresentato da*

$$\sqrt{E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2},$$

l'espressione

$$(\Delta_1 \varphi)^2 = \frac{E\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

è una nuova funzione assoluta.

Se φ, ψ *sono due funzioni assolute della stessa superficie, le due espressioni*

$$\frac{E \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right) + G \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2} = \nabla \varphi \psi,$$

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

sono due nuove funzioni assolute *).

Dalle espressioni generali di $\Delta_1 \varphi$, $\nabla \varphi \psi$, si cava

$$(\Delta_1 u)^2 = \frac{G}{EG - F^2}, \quad \nabla u v = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad (\Delta_1 v)^2 = \frac{E}{EG - F^2},$$

laonde, scrivendo per semplicità h_1, h_2, h_{12} in luogo di $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v$, $\nabla u v$, si ha

*) Le proprietà di queste espressioni risultano anche dalla acuta analisi usata dal sig. CASORATI, come può vedersi nel § VI della sua Memoria.

$$
(36)\qquad \begin{cases} (\Delta_1\varphi)^2 = h_1^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + 2h_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + h_2^2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \\[2ex] \nabla\varphi\psi = h_1^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} + h_{12}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\right) + h_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}. \end{cases}
$$

Inoltre si hanno le relazioni

$$
(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{E}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\[2ex] \dfrac{-F}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\[2ex] \dfrac{G}{\sqrt{EG-F^2}} = \dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}. \end{cases}
$$

Denominando θ l'angolo delle due curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, si hanno anche le formole

$$
(38)\qquad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{h_{12}}{h_1h_2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}{h_1h_2}, \\[2ex] E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \dfrac{h_1^2\,dv^2 - 2h_{12}\,dv\,du + h_2^2\,du^2}{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}, \end{cases}
$$

dall'ultima delle quali emerge che se si avessero sulla superficie due nuovi sistemi di curve $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, e se le ρ_1, ρ_2 si assumessero come coordinate curvilinee, in vece delle u, v, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, riferito a queste nuove coordinate, sarebbe

$$
\frac{(\Delta_1\rho_2)^2.d\rho_1^2 - 2\nabla\rho_1\rho_2.d\rho_1\,d\rho_2 + (\Delta_1\rho_1)^2.d\rho_2^2}{(\Delta_1\rho_1)^2(\Delta_1\rho_2)^2 - (\nabla\rho_1\rho_2)^2} \quad *).
$$

Per la medesima ragione è lecito supporre, nelle (36), che le u, v anzichè essere

*) Nell'art. XXI delle citate *Disquisitiones generales* etc. GAUSS ha dato le formole per la trasformazione delle coordinate curvilinee. Le ultime tre equazioni del detto articolo potrebbero servire a stabilire l'*invariabilità* delle espressioni Δ_1, ∇, ragionando secondo i principii precedentemente esposti. Avvertiremo qui che nella seconda delle tre equazioni di GAUSS bisogna mutare il segno ad uno dei due membri.

le coordinate stesse, sieno due funzioni qualisivogliano di queste coordinate. Comunque si particolarizzino queste funzioni, quelle due formole riprodurranno sempre lo stesso valore per le espressioni $\Delta_1\varphi$, $\nabla\varphi\psi$.

XV.

Supponiamo che sulla superficie il cui elemento lineare è espresso dalla (34) sieno tracciati, oltre i due sistemi coordinati, due altri sistemi di curve intersecantisi in ogni punto ad angolo retto. Sieno

$$\rho_1(u, v) = \rho_1, \qquad \rho_2(u, v) = \rho_2$$

le loro equazioni risolute rispetto ai parametri arbitrarii ρ_1 e ρ_2. Avremo le seguenti tre equazioni:

$$(39)\quad \begin{cases} (\Delta_1\rho_1)^2 = \dfrac{E\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} + G\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}, \\[2ex] (\Delta_1\rho_2)^2 = \dfrac{E\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} + G\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}, \\[2ex] 0 = E\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u} + \dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial v}\right) + G\dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial u}. \end{cases}$$

Rammentando la proprietà geometrica dei parametri differenziali ed avendo riguardo all'ortogonalità delle curve ρ_1, ρ_2, si vede essere

$$ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}, \qquad ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2},$$

dove s_2, s_1 sono gli archi delle linee $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, ed h_1, h_2 sono messi per comodità di scrittura in luogo di $\Delta_1\rho_1$, $\Delta_1\rho_2$. Le ρ_1, ρ_2 si possono evidentemente riguardare come coordinate curvilinee ortogonali della superficie, e il quadrato dell'elemento lineare riferito ad esse è

$$\frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2},$$

dove h_1, h_2 si possono considerare come funzioni delle ρ_1, ρ_2.

Poniamo, per brevità,

$$
(40) \quad \begin{cases} G\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u} - F\dfrac{\partial \rho_1}{\partial v} = M_1, \qquad E\dfrac{\partial \rho_1}{\partial v} - F\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u} = N_1, \\ G\dfrac{\partial \rho_2}{\partial u} - F\dfrac{\partial \rho_2}{\partial v} = M_2, \qquad E\dfrac{\partial \rho_2}{\partial v} - F\dfrac{\partial \rho_2}{\partial u} = N_2, \\ EG - F^2 = T^2. \end{cases}
$$

Le (39) potranno scriversi nel modo seguente:

$$
(41') \quad \begin{cases} M_1\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u} + N_1\dfrac{\partial \rho_1}{\partial v} = T^2 h_1^2, \\ M_1\dfrac{\partial \rho_2}{\partial u} + N_1\dfrac{\partial \rho_2}{\partial v} = 0; \end{cases}
$$

$$
(41'') \quad \begin{cases} M_2\dfrac{\partial \rho_1}{\partial u} + N_2\dfrac{\partial \rho_1}{\partial v} = 0, \\ M_2\dfrac{\partial \rho_2}{\partial u} + N_2\dfrac{\partial \rho_2}{\partial v} = T^2 h_2^2. \end{cases}
$$

Le (40) dànno

$$
M_1 N_2 - M_2 N_1 = T^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} - \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \frac{\partial \rho_2}{\partial u} \right);
$$

parimenti dalle (41′, 41″) si deduce

$$
(M_1 N_2 - M_2 N_1) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} - \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \frac{\partial \rho_2}{d u} \right) = T^4 h_1^2 h_2^2,
$$

il confronto di queste due ultime equazioni porge

$$
(42) \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} - \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \frac{\partial \rho_2}{\partial u} = T h_1 h_2 :
$$

[quest'equazione non è che un caso particolare della formola da cui, nell'art. precedente, venne ricavata la funzione invariabile (35)].

Quando si assumono le ρ_1, ρ_2 come variabili principali, le u, v diventano variabili dipendenti, e le ordinarie formole per la trasformazione delle derivate parziali dànno, vista la (42),

$$
(43) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho_1} = \dfrac{1}{T h_1 h_2} \dfrac{\partial \rho_2}{\partial v}, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial \rho_1} = \dfrac{-1}{T h_1 h_2} \dfrac{\partial \rho_2}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho_2} = \dfrac{-1}{T h_1 h_2} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial v}, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial \rho_2} = \dfrac{1}{T h_1 h_2} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial u}. \end{cases}
$$

Altre espressioni delle medesime derivate parziali di u, v si hanno dalle (41', 41''). Infatti moltiplicando le due prime di queste equazioni per $\frac{\partial u}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial u}{\partial \rho_2}$ e sommando, indi per $\frac{\partial v}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho_2}$ e di nuovo sommando, ed analogamente operando sulle due seconde equazioni anzidette, si ottengono le formole seguenti:

$$(44) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = \frac{M_1}{T^2 h_1^2}, & \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{N_1}{T^2 h_1^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = \frac{M_2}{T^2 h_2^2}, & \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{N_2}{T^2 h_2^2}. \end{cases}$$

Queste formole sono notevoli massimamente per ciò che i valori delle derivate di u e v rispetto a ρ_1 sono dati da esse mediante espressioni che contengono solamente le derivate di ρ_1 rispetto ad u ed a v, non comparendovi quelle della funzione ρ_2. Così dicasi degli altri due valori. Perciò se si ha una funzione qualunque χ di u e v, e se questa funzione si suppone espressa per ρ_1, ρ_2, coordinate di due sistemi *ortogonali*, le sue derivate parziali rispetto a ρ_1, ρ_2 potranno esprimersi così:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{1}{T^2 h_1^2}\left(M_1 \frac{\partial \chi}{\partial u} + N_1 \frac{\partial \chi}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{1}{T^2 h_2^2}\left(M_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} + N_2 \frac{\partial \chi}{\partial v}\right),$$

od anche, più brevemente, così:

$$(45) \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \rho_1} = \frac{\nabla \rho_1 \chi}{h_1^2}, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \rho_2} = \frac{\nabla \rho_2 \chi}{h_2^2}.$$

Se dunque χ fosse una espressione formata colle E, F, G e colle derivate della ρ_1 o della ρ_2, le due derivate $\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial \chi}{\partial \rho_2}$ sarebbero due funzioni invariabili, contenenti rispettivamente la funzione ρ_1 o la ρ_2.

Confrontando le formole (43), (44) si ottiene

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial u} = -\frac{N_1 h_2}{T h_1}, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial v} = \frac{M_1 h_2}{T h_1},$$

da cui, eliminando ρ_2, si trae

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1 h_2}{T h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N_1 h_2}{T h_1}\right) = 0,$$

ovvero, sviluppando le derivate,

$$\frac{M_1}{T}\frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial u}+\frac{N_1}{T}\frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial v}+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial \frac{M_1}{T}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{N_1}{T}}{\partial v}\right)=0,$$

od anche, per le (44),

$$Th_1^2\left(\frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho_1}+\frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \rho_1}\right)+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial \frac{M_1}{T}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{N_1}{T}}{\partial v}\right)=0$$

cioè

$$Th_1^2\frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial \rho_1}+\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial \frac{M_1}{T}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{N_1}{T}}{\partial v}\right)=0.$$

A questa formola, ed a quella che si otterrebbe eliminando ρ_1 con un processo analogo, si può dare la forma seguente:

$$(46)\quad \begin{cases} h_1^2\dfrac{\partial \log \frac{h_1}{h_2}}{\partial \rho_1}=\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial \frac{M_1}{T}}{\partial u}+\dfrac{\partial \frac{N_1}{T}}{\partial v}\right), \\ h_2^2\dfrac{\partial \log \frac{h_2}{h_1}}{\partial \rho_2}=\dfrac{1}{T}\left(\dfrac{\partial \frac{M_2}{T}}{\partial u}+\dfrac{\partial \frac{N_2}{T}}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Ora i primi membri di queste due equazioni sono, o possono considerarsi, come funzioni delle ρ_1, ρ_2: i secondi invece sono funzioni delle u, v. Ogni traccia delle relazioni fra questi due sistemi di variabili è scomparsa. Dunque (art. XIII): *le due funzioni*

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \frac{M_1}{T}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{N_1}{T}}{\partial v}\right),\qquad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \frac{M_2}{T}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{N_2}{T}}{\partial v}\right)$$

sono funzioni invariabili. La prima di queste funzioni, oltre le E, F, G e le loro derivate, contiene la funzione ρ_1 (che è arbitraria); la seconda contiene in analoga maniera la funzione ρ_2. Noi le chiameremo *parametri differenziali di second'ordine* delle funzioni ρ_1, ρ_2 e le denoteremo col simbolo Δ_2 prefisso alle funzioni stesse. In generale dunque, riponendo per M, N, T i loro valori, e considerando una funzione qualunque φ, si ha, come definizione analitica del parametro differenziale di second'ordine di questa

funzione,

$$(47)\qquad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right].$$

Applicando a questa nuova funzione invariabile le considerazioni esposte nell'articolo XIII, si ha il seguente teorema:

Se φ è una funzione assoluta della superficie il cui elemento lineare è

$$\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2},$$

l'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]$$

è una nuova funzione assoluta.

Per verificare la invariabilità di quest'espressione, si può particolarizzare il sistema (u, v) in modo da farlo coincidere col sistema (ρ_1, ρ_2). Ciò si ottiene ponendo

$$u=\rho_1,\quad v=\rho_2,\quad E=\frac{1}{h_1^2},\quad F=0,\quad G=\frac{1}{h_2^2}$$

e supponendo successivamente $\varphi=\rho_1$, $\varphi=\rho_2$. Infatti si ha in tal modo

$$(48)\qquad \Delta_2\rho_1 = h_1h_2\frac{\partial\frac{h_1}{h_2}}{\partial\rho_1},\qquad \Delta_2\rho_2 = h_1h_2\frac{\partial\frac{h_2}{h_1}}{\partial\rho_2},$$

espressioni le quali non differiscono che nella forma da quelle che trovansi scritte nei primi membri delle (46).

Del resto se si confronteranno le espressioni $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$ (formate colle ρ_1, ρ_2) colle formole (22) del § XIII delle ammirabili *Leçons sur les coordonnées curvilignes* del sig. LAMÉ, apparirà giustificata la denominazione che abbiamo imposta a quelle funzioni. Ciò risulterà anche meglio dagli sviluppi che seguono.

XVI.

Facendo uso delle relazioni (37), l'espressione (47) assume la forma:

$$(49)\qquad \Delta_2\varphi = \sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}+h_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+h_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{h_1^2h_2^2-h_{12}^2}}\right)\right],$$

da cui si cava in particolare

$$\Delta_2 u = \sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right)\right],$$

$$\Delta_2 v = \sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_{12}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2}}\right)\right].$$

In virtù di queste due ultime formole la precedente può essere messa sotto la forma:

$$(50) \qquad \Delta_2\varphi = h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2h_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \Delta_2 u.\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \Delta_2 v.\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

La formola (49), del pari che la (50), definisce la funzione $\Delta_2\varphi$ in un modo più vantaggioso che la (47). Infatti le u, v che, in quest'ultima equazione, rappresentano le coordinate curvilinee a cui si è riferita la superficie, possono, nelle (49), (50), rappresentare due sistemi di curve tracciate comunque sulla superficie stessa indipendentemente dai due sistemi coordinati; poichè siccome queste due ultime formole non contengono, oltre le derivate della φ, che i parametri differenziali delle funzioni u, v, così l'invariabilità di queste espressioni rende indifferente la scelta del primitivo sistema di coordinate. Lo stesso deve dirsi delle formole (36), rispetto alle analoghe in E, F, G.

Nel caso che le u, v corrispondano a due sistemi ortogonali, si ha $h_{12} = 0$, epperò, scambiando u in ρ_1 e v in ρ_2, si ottengono le formole

$$(\Delta_1\varphi)^2 = h_1^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)^2,$$

$$\Delta_2\varphi = h_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_1^2} + h_2^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_2^2} + \Delta_2\rho_1.\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} + \Delta_2\rho_2.\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2};$$

dalla (49) si cava inoltre

$$\Delta_2\varphi = h_1 h_2\left[\frac{\partial\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\right)}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}\right)}{\partial\rho_2}\right].$$

Le prime due di queste ultime formole presentano la più perfetta analogia colle (24), (25) del sig. LAMÉ (*Coord. curv.* § XIV); la terza corrisponde alla (26) (*ibid.*).

Le funzioni Δ_1, Δ_2 relative ad un certo sistema di curve tracciate sulla superficie possono avere infiniti valori differenti. Infatti il sistema di curve $\varphi = \text{cost.}$ non differisce, geometricamente, dal sistema $f(\varphi) = \text{cost.}$; ma i parametri Δ_1 e Δ_2 sono diffe-

renti secondo che si adotta l'una o l'altra forma. Ed invero si trova facilmente

$$\Delta_1 f(\varphi) = f'(\varphi) . \Delta_1 \varphi ,$$

$$\Delta_2 f(\varphi) = f'(\varphi) . \Delta_2 \varphi + f''(\varphi) . (\Delta_1 \varphi)^2 ,$$

formole che presentano una grande analogìa con quelle che nel calcolo differenziale, servono alla differenziazione delle funzioni composte

$$d f(\varphi) = f'(\varphi) . d\varphi ,$$

$$d^2 f(\varphi) = f'(\varphi) . d^2 \varphi + f''(\varphi) . d\varphi^2 .$$

Questa circostanza, che è massimamente notevole per la funzione Δ_2, rende in certo modo ragione del perchè questa funzione si introduca spontaneamente in un gran numero di ricerche « come se essa, dice il sig. LAMÉ *), fosse una *derivata naturale,* più essenziale, più semplice ed in pari tempo più completa di tutte le derivate parziali che si sogliono considerare e che si scelgono più o meno arbitrariamente ».

I due sistemi ortogonali ρ_1 e ρ_2 non vengono alterati considerando, invece delle corrispondenti variabili ρ_1, ρ_2, le due nuove quantità ρ'_1, ρ'_2 delle quali la prima dipende solamente da ρ_1, la seconda da ρ_2. In questa ipotesi, dai valori di ds_1, ds_2 dati al principio dell'art. XV si ottiene

$$ds_2 : ds_1 = h_1 \frac{d\rho'_1}{d\rho_1} d\rho'_2 : h_2 \frac{d\rho'_2}{d\rho_2} d\rho'_1 .$$

Ciò posto, cerchiamo le condizioni che debbono verificarsi affinchè i due sistemi di curve, mercè una variazione opportuna dei loro parametri, dividano la superficie in quadrati infinitamente piccoli. È chiaro che bisogna poter determinare le funzioni ρ'_1 e ρ'_2 in modo che si abbia $ds_1 = ds_2$ per $d\rho'_1 = d\rho'_2$, ossia che si abbia

$$\log \frac{h_1}{h_2} = \log \frac{d\rho'_2}{d\rho_2} - \log \frac{d\rho'_1}{d\rho_1} ,$$

da cui

$$\frac{\partial^2 \log \frac{h_1}{h_2}}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0 ;$$

reciprocamente, quando ciò ha luogo, è manifestamente possibile determinare le funzioni ρ'_1, ρ'_2, poichè $\frac{h_1}{h_2}$ è il prodotto di due funzioni, l'una soltanto di ρ_1, l'altra sol-

*) *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), § XV.

tanto di ρ_2. Ora l'equazione precedente equivale, in virtù delle formole

$$\Delta_2 \rho_1 = h_1^2 \frac{\partial \log \frac{h_1}{h_2}}{\partial \rho_1}, \qquad \Delta_2 \rho_2 = h_2^2 \frac{\partial \log \frac{h_2}{h_1}}{\partial \rho_2},$$

ad una delle due seguenti:

$$\frac{\partial \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2}}{\partial \rho_2} = 0, \qquad \frac{\partial \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2^2}}{\partial \rho_1} = 0,$$

le quali rientrano l'una nell'altra, in causa della relazione

$$\frac{\partial \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2^2}}{\partial \rho_1} = 0,$$

che è una conseguenza immediata dei precedenti valori di $\Delta_2 \rho_1$, $\Delta_2 \rho_2$: bisogna dunque che il rapporto $\frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2}$ sia funzione solamente di ρ_1. Questa condizione è necessaria e sufficiente, e non richiede punto la conoscenza della funzione ρ_2. Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione analoga ad una conosciuta: affinchè un sistema di curve, $\varphi =$ cost., combinato col suo sistema ortogonale, divida la superficie in quadrati infinitamente piccoli (ben inteso facendo variare opportunamente i parametri dei due sistemi), è necessario e sufficiente che il rapporto

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2}$$

dipenda dalla sola quantità φ. Quando si verifica questa proprietà, le curve del sistema $\varphi =$ cost. si chiamano *isoterme*, in causa delle proprietà che possedono, allorchè si considerano in relazione alla teoria del calore. Quando la precedente condizione è soddisfatta, il valore del rapporto in quistione si può mettere sotto la forma $\frac{F'(\varphi)}{F(\varphi)}$, e da una formola già incontrata in questo articolo si deduce

$$\Delta_2 f(\varphi) = \frac{(\Delta_1 \varphi)^2}{F(\varphi)} \left[F'(\varphi) . f'(\varphi) + F(\varphi) . f''(\varphi) \right] = \frac{(\Delta_1 \varphi)^2}{F(\varphi)} \frac{d[F(\varphi) . f'(\varphi)]}{d\varphi}.$$

Se dunque si determina f in modo che risulti

$$\frac{d[F(\varphi) . f'(\varphi)]}{d\varphi} = 0$$

ossia

$$f(\varphi) = A \int \frac{d\varphi}{F(\varphi)} + B,$$

si otterrà

$$\Delta_2 f(\varphi) = 0,$$

ed il parametro $f(\varphi)$ del sistema di curve isoterme $\varphi =$ cost. acquisterà la proprietà di avere il suo Δ_2 eguale a zero. Quando ciò ha luogo (nel qual caso è chiaro che in luogo del parametro f si può prendere una sua funzione lineare) il parametro stesso si dirà *termometrico* (seguendo l'analogìa delle denominazioni usate dal sig. Lamé). Così, se le variabili ρ_1, ρ_2 sono i parametri termometrici di due sistemi isotermi ortogonali, dalla definizione di questi parametri e dalle (48) risulta

$$\frac{\partial \frac{h_1}{h_2}}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial \frac{h_2}{h_1}}{\partial \rho_2} = 0,$$

donde consegue che il rapporto $h_1 : h_2$ è costante, e che quindi si può supporre $h_1 = ah$, $h_2 = bh$, dove h è una funzione di ρ_1, ρ_2, ed a, b sono costanti. Se dunque si trasformano le variabili linearmente, ponendo

$$\rho_1 = au + a', \qquad \rho_2 = bv + b',$$

il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2}, \tag{51}$$

e le u, v possono ancora considerarsi come i parametri termometrici di due sistemi isotermi ortogonali. È chiaro che, supponendo eguali fra loro gli incrementi du, dv, la superficie viene così ad essere divisa in quadrati infinitamente piccoli.

Quando il quadrato dell'elemento lineare ha la forma (51), si hanno le formole semplicissime

$$(\Delta_1 \varphi)^2 = h^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right], \qquad \Delta_2 \varphi = h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right),$$

da cui si deduce

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{(\Delta_1 \varphi)^2} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2}.$$

Questo rapporto, che deve essere funzione della sola φ affinchè le linee $\varphi =$ cost. sieno isoterme, ha la stessa forma di quello che si ottiene pei sistemi cilindrici, quando u e v esprimono coordinate rettangole.

È degno d'essere notato che l'integrazione dell'equazione alle derivate parziali di

2° ordine

$$\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2}=\frac{F'(\varphi)}{F(\varphi)}$$

(in cui la funzione F è data e la φ è incognita), può sempre farsi dipendere dall'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria fra due variabili e da una quadratura. Infatti sieno Π, Π' i due fattori immaginarii conjugati dell'espressione quadratica

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

e sia $U+iV=$ cost. l'integrale dell'equazione differenziale ordinaria $\Pi=0$, dove U e V denotano due funzioni reali di u e di v. Si avrà evidentemente

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=\frac{1}{H^2}(dU^2+dV^2),$$

dove H è una certa funzione finita di u, v facilmente determinabile. Rappresentiamo ora con Φ il risultato che si otterrebbe esprimendo φ in funzione delle U, V. Siccome le due funzioni $\Delta_1\varphi$, $\Delta_2\varphi$ sono invariabili, così si possono trasformare immediatamente le variabili nella proposta equazione, e si ottiene

$$\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial U^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial V^2}}{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial U}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial V}\right)^2}=\frac{F'(\Phi)}{F(\Phi)}$$

Ora quest'equazione può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2\displaystyle\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)}}{\partial U^2}+\frac{\partial^2\displaystyle\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)}}{\partial V^2}=0,$$

e di questa è noto essere l'integrale generale

$$\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)}=P(U+iV)+Q(U-iV).$$

Dunque per effettuare completamente l'integrazione dell'equazione proposta basta poter integrare l'equazione differenziale ordinaria $\Pi=0$, e determinare l'integrale $\displaystyle\int\frac{d\Phi}{F(\Phi)}$.

XVII.

Indicando con ρ il parametro termometrico di una famiglia di curve tracciate sulla superficie (51), si deve avere

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 0,$$

da cui

$$\rho = \frac{\varphi(u + iv) + \psi(u - iv)}{2}. \tag{52}$$

Affinchè ρ risulti reale, bisogna che le due funzioni φ e ψ si cangino l'una nell'altra pel cambiamento di $+i$ in $-i$. In questa ipotesi ponendo

$$\rho' = \frac{\varphi(u + iv) - \psi(u - iv)}{2i},$$

si ottiene anche per ρ' un valore reale, ed è evidente che ρ' è il parametro termometrico di una seconda famiglia di curve isoterme. Ora da queste formole si cava

$$\rho + i\rho' = \varphi(u + iv), \qquad \rho - i\rho' = \psi(u - iv)$$

e quindi, osservando che φ' e ψ' sono quantità conjugate,

$$d\rho^2 + d\rho'^2 = (\text{mod}\,\varphi')^2 (du^2 + dv^2).$$

Questo risultato ci insegna che i due sistemi isotermi ρ e ρ' sono ortogonali fra loro.

Indichiamo ora con ds l'elemento di una linea passante pel punto (u, v), e con θ l'angolo ch'esso fa coll'elemento della $v = \text{cost.}$; si ha

$$du = h \cos\theta\, ds, \qquad dv = h \,\text{sen}\, \theta\, ds$$

e quindi

$$\text{sen}\,\theta\, du - \cos\theta\, dv = 0. \tag{53}$$

Di qui risulta che l'equazione

$$\mu = u\,\text{sen}\,\theta - v \cos\theta + c$$

(dove μ è un parametro arbitrario) rappresenta un sistema di curve che tagliano quelle del sistema isotermo $v = \text{cost.}$ sotto l'angolo *costante* θ. Quest'equazione può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mu = \frac{\left(c e^{i\theta} - \dfrac{u + iv}{i}\right) e^{-i\theta} + \left(c e^{-i\theta} + \dfrac{u - iv}{i}\right) e^{i\theta}}{2},$$

donde consegue che μ è il parametro termometrico di un sistema di curve isoterme. Siccome l'espressione di μ non contiene traccia della quantità h, che definisce il doppio sistema (u, v), e suppone solamente che le variabili u, v dieno all'elemento la forma (51), così l'equazione più generale

$$\mu = \rho \operatorname{sen} \theta - \rho' \cos \theta + c$$

rappresenta un sistema di curve che tagliano quelle del sistema $\rho' =$ cost. sotto l'angolo costante θ.

Queste proprietà, che si possono anche dedurre immediatamente dal fecondo principio di Gauss *), potrebbero reciprocamente servire a stabilirlo geometricamente. Esse risultano anche molto semplicemente dalla proprietà che hanno i due sistemi u e v (oppure ρ, ρ') di dividere la superficie in quadrati infinitamente piccoli.

Le formole precedenti stabiliscono una evidente analogia fra gli infiniti sistemi isotermi che segano sotto un angolo costante un sistema isotermo dato, e gli infiniti sistemi di rette parallele che si possono tracciare in un piano. Questa analogia si estende ad altri sistemi isotermi, come avremo occasione di vedere. Così per es. le due equazioni

$$\alpha = \log \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{c}, \qquad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u},$$

rappresentano due sistemi isotermi ortogonali di cui α e β sono i parametri termometrici. Sostituendo x ed y ad u e v si avrebbero le ordinarie coordinate isoterme polari nel piano.

Notiamo anche quest'altro risultato. Chiamando θ l'angolo (variabile) del sistema isotermo $\rho =$ cost. col sistema $v =$ cost., si ha dalla (53)

$$\cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

ossia, ponendo per un istante $u + iv = p$, $u - iv = q$,

$$e^{i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial p} + e^{-i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial q} = 0,$$

da cui, supponendo che ρ abbia il valore (52),

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\log \varphi' - \log \psi'}{2i}.$$

---

*) *Allgemeine Auflösung* ecc. nelle Astronomischen Abhandlungen, 3 Heft, Altona 1825. Una traduzione di questa importante Memoria trovasi nel tomo IV degli Annali di Matematica pura ed applicata (1861), pag. 214.

Di qui si scorge che l'angolo θ, considerato come una funzione di u e di v, è il parametro termometrico di un sistema di curve isoterme, il quale dipende in un modo semplice dal sistema primitivo ρ. Possiamo dunque enunciare questo teorema: *le linee luoghi geometrici dei punti in cui è costante l'angolo di due sistemi isotermi tracciati sopra una superficie qualunque, costituiscono un sistema isotermo.* In questo teorema è compreso quello che il sig. HATON DE LA GOUPILLIÈRE *) ha dato rispetto alle linee piane da lui chiamate *isocliniche.*

Il sistema isotermo ortogonale

$$\nu = \frac{\log \varphi' + \log \psi'}{2} = \log \operatorname{mod} \varphi'$$

è costituito dalle linee lungo le quali l'angolo θ varia più rapidamente che in ogni altra direzione: esse corrispondono alle *isodinamiche* del sig. HATON.

Ritorniamo all'ipotesi delle coordinate u e v qualisivogliano, ed adottiamo la forma (38) dell'elemento lineare. L'equazione

$$\frac{\partial^2 \frac{h_1}{h_2}}{\partial u \partial v} = 0,$$

la quale, nel caso delle coordinate ortogonali, esprime la condizione della loro isotermia, definisce, nel caso delle coordinate oblique, una proprietà delle medesime che comprende l'isotermia come caso particolare. È chiaro infatti che quando la precedente condizione è soddisfatta identicamente, è possibile surrogare ad u una funzione di u ed a v una funzione di v, per modo da rendere $h_1 = h_2$. Ne risulta che, determinando convenientemente gli incrementi du, dv, la superficie viene ad essere divisa in *rombi* infinitamente piccoli.

Supponiamo dunque $h_1 = h_2 = h$. Osservando le (38) si vedrà che al quadrato dell'elemento lineare può in questo caso darsi la forma:

$$\frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos\theta}{h^2 \operatorname{sen}^2 \theta},$$

e ponendo

$$u + v = 2p, \qquad u - v = 2q,$$

da cui

$$u = p + q, \qquad v = p - q,$$

*) Journal de l'École Polytechnique, t. XXII, cahier 38 (1861), pag. 23.

quest'altra

$$\frac{dp^2}{h^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{dq^2}{h^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Questo risultato ci insegna che le curve $p = \text{cost.}$, $q = \text{cost.}$ sono ortogonali fra loro. Esse hanno inoltre le proprietà d'essere dirette secondo le diagonali dei rombi infinitesimi che sono tracciati sulla superficie dalle curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$

Infatti denominando ds_u, ds_v gli elementi delle curve $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, si ha

$$du = h \operatorname{sen} \theta \, ds_u, \qquad dv = h \operatorname{sen} \theta \, ds_v,$$

quindi

$$2\,dp = h \operatorname{sen} \theta (ds_u + ds_v),$$

$$2\,dq = h \operatorname{sen} \theta (ds_u - ds_v).$$

Dunque per le linee $q = \text{cost.}$ si ha $ds_u = ds_v$, e per le linee $p = \text{cost.}$, $ds_u = -ds_v$, donde risulta che le linee $q = \text{cost.}$ sono le bissettrici interne dell'angolo θ, mentre le $p = \text{cost.}$ sono le sue bissettrici esterne.

Merita di essere particolarmente menzionato il caso in cui i due sistemi $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono costituiti da curve parallele geodeticamente fra loro. In questo caso, determinando convenientemente i parametri di questi due sistemi, si può prendere $h_1 = h_2 = 1$ (vedi art. IV); e siccome quando ciò ha luogo le u, v rappresentano le distanze geodetiche del punto qualunque (u, v) dalle curve iniziali $u = 0$, $v = 0$, così la proprietà or ora dimostrata conduce a questo teorema: *i due sistemi formati dalle curve luoghi geometrici dei punti di cui è costante la somma o la differenza delle distanze geodetiche da due curve fisse tracciate sopra una superficie qualunque, sono ortogonali fra loro.*

In questo teorema, già enunciato dal sig. WEINGARTEN *), è compreso quello ritrovato dal sig. BETTI **), nel caso che le due curve fisse riducansi a due punti, ovvero che l'una sola d'esse si riduca ad un punto.

XVIII.

È ora noto generalmente che s'intenda per *curvatura geodetica* di una linea tracciata sopra una superficie. Fra le varie definizioni che se ne possono dare ***), ci ac-

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXII (1863), pag. 166.

**) Annali di Matematica pura ed applicata, t. III (1860), pag. 336.

***) Il lettore potrà trovarle enumerate ed accuratamente discusse nei § 714-718 del *Trattato di calcolo differenziale* del sig. BERTRAND.

contenteremo perciò di richiamare la seguente, che conduce molto spontaneamente alla ricerca della sua espressione analitica: *la curvatura geodetica di una linea tracciata sopra una superficie è la projezione della curvatura assoluta sul piano tangente alla superficie nel punto che si considera.* In altre parole, fra gli infiniti raggi delle sviluppate della linea data, uno esiste nel piano tangente alla superficie: la curvatura geodetica è l'inversa di questo raggio *).

Partendo da questa definizione si trova facilmente **) che se la superficie è riferita a due sistemi di curve ortogonali ρ_1 e ρ_2, cosicchè il suo elemento lineare abbia la forma:

$$\sqrt{\frac{d\rho_1^2}{h_1^2}+\frac{d\rho_2^2}{h_2^2}},$$

chiamando $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ le curvature geodetiche delle linee $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, si ha

$$(52') \qquad \frac{1}{r_1} = h_1 h_2 \frac{\partial \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{1}{r_2} = h_1 h_2 \frac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2}.$$

Rispetto ai segni di queste curvature, è da ritenersi che essi risultano positivi quando la convessità delle curve $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$ è rivolta da quella parte verso cui cresce il parametro del sistema rispettivo.

Se le curve di uno dei sistemi, per es. le $\rho_2 = \text{cost.}$, sono geodetiche, si ha (art. IV) $\frac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2} = 0$ e quindi $\frac{1}{r_2} = 0$. Questa proprietà deriva anche immediatamente dalla stessa definizione della curvatura geodetica.

Prima di proceder oltre esporremo una proprietà della curvatura geodetica, dalla quale scaturisce una nuova definizione geometrica di questo ente.

La tangente alla curva $\rho_2 = \text{cost.}$ può rappresentarsi colle equazioni

$$x = \xi + r h_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \qquad y = \eta + r h_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \qquad z = \zeta + r h_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1},$$

*) Alcuni scrittori inglesi adoperano la denominazione di *curvatura tangenziale.* Se l'appellativo di *geodetica* non fosse già ricevuto nell'uso comune, avremmo preferito quest'altro, a parer nostro meglio appropriato. La *curvatura normale* è, secondo i medesimi scrittori, la projezione della curvatura assoluta sul piano normale, ossia la curvatura della sezione normale che contiene la tangente della linea considerata.

**) Brioschi, *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie,* Art. 7 [Annali di Scienze Matematiche e Fisiche (di Tortolini), t. III (1852), pag. 293].

in cui r rappresenta la distanza dal punto qualunque (ξ, η, ζ) di questa retta al punto di contatto (x, y, z), misurata nel senso in cui si va dal primo al secondo.

Si immagini il sistema delle linee che hanno le tangenti conjugate colle $\rho_2 =$ cost. Le tangenti a due curve consecutive di quest'ultimo sistema, nei punti in cui le curve stesse sono tagliate da una delle curve conjugate, s'incontrano in un punto. Indichiamo con $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ gli incrementi che ricevono ρ_1 e ρ_2 quando si passa dal punto (ρ_1, ρ_2) al punto contiguo, lungo la conjugata della linea $\rho_2 =$ cost. Supponendo che ξ, η, ζ, siano le coordinate del punto comune alle due tangenti consecutive, gli incrementi $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono nulli, e si ha quindi

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial x}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta\rho_1 + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\delta\rho_2 = h_1\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta r + r\left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\delta h_1 + h_1\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right),$$

da cui, moltiplicando per $\frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \frac{\partial y}{\partial \rho_2}, \frac{\partial z}{\partial \rho_2}$ e sommando con riguardo alla

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = 0,$$

si ottiene

$$\frac{\delta\rho_2}{h_2^2} = h_1 r\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right).$$

Ma dall'equazione precedente e dalle

$$\frac{1}{h_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2,$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2,$$

si deduce facilmente

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1}\delta\rho_2 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2}\delta\rho_1,$$

dunque sostituendo

$$(53') \qquad \frac{\delta\rho_2}{h_2^2} = h_1 r\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1}\delta\rho_2 - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2}\delta\rho_1\right).$$

Se le linee del sistema $\rho_2 = \text{cost.}$ sono geodetiche, si ha $\dfrac{\partial \frac{1}{h_1}}{\partial \rho_2} = 0$, e quindi

$$\frac{1}{r} = h_1 h_2 \frac{\partial \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1}.$$

Ora il secondo membro di quest'equazione non è [eq. (52')] che la curvatura geodetica della linea $\rho_1 = \text{cost.}$ Abbiamo dunque il seguente teorema *):

Sia $\ldots a_1 a a' \ldots$ *una curva qualunque, tracciata sopra una superficie. Da ciascun punto di essa si facciano partire le linee geodetiche ortogonali* $\ldots a_1 b_1, a b, a'b', \ldots$ *e si faccia passare pel punto* (a) *una linea a tangenti conjugate con queste linee geodetiche. Il punto* C, *in cui la tangente in* (a) *alla geodetica* $a b$ *è incontrata dalla tangente alla geodetica infinitamente vicina nel punto* (α') *comune a questa ed alla linea conjugata* $\ldots \alpha_1 a \alpha' \ldots$, *è il centro della curvatura geodetica della linea* $\ldots a_1 a a' \ldots$ *nel punto* (a).

(Quando la superficie è piana, le geodetiche ortogonali diventano le rette normali alla curva $\ldots a_1 a a' \ldots$, ed il teorema precedente si converte in quello notissimo relativo al centro dell'ordinaria curvatura).

Supponendo $h_1 = 1$, ciò che è lecito nelle ipotesi ammesse, si ha semplicemente

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial \log h_2}{\partial \rho_1}. \tag{54}$$

L'espressione della curvatura geodetica è una funzione delle h_1, h_2 e delle loro derivate rapporto a ρ_1, ρ_2. Essa è dunque una quantità che non viene alterata da ogni flessione della superficie alla quale essa si riferisce. È questa una delle ragioni che ne rendono importantissima la considerazione.

XIX.

I risultati dell'articolo precedente conducono molto spontaneamente alla dimostrazione dei teoremi del sig. WEINGARTEN, cui abbiamo già fatto allusione alla fine dell'art. VI.

Consideriamo infatti una superficie qualunque (S), ed il luogo (Σ) dei suoi centri, relativi ad uno dei sistemi di linee di curvatura. Sia (L) una linea di curvatura dell'altro sistema ed M, M' due punti contigui di questa linea. Le normali in questi punti alla superficie (S) si incontrano in un punto C, centro di curvatura della se-

*) Il lettore è pregato di fare la figura, che gioverà anche all'intelligenza dell'articolo seguente.

zione normale tangente alla linea (L) nel punto M. Inoltre tutte le normali della superficie (S) nei punti della linea (L) toccano la superficie (Σ) lungo una linea $\ldots \alpha_1 \alpha \alpha' \ldots$ che ha le tangenti conjugate colle linee geodetiche $\ldots a_1 b_1,\ ab,\ a'b', \ldots$ inviluppate, sulla superficie (Σ), dalle normali della superficie (S). Ne risulta che i due raggi principali R_1, R_2 della superficie (S) nel punto M sono (art. precedente)

$$R_1 = aM, \qquad R_2 = CM = R_1 + r_1,$$

donde, per la (54),

$$R_2 - R_1 = -\frac{1}{\frac{\partial \log h_2}{\partial \rho_1}},$$

ammesso che $\sqrt{d\rho_1^2 + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2}}$ sia l'elemento lineare della superficie (Σ), riferita alle coordinate geodetiche ρ_1 e ρ_2, la prima delle quali rappresenti l'arco di geodetica $\ldots ab \ldots$, contato da una trajettoria ortogonale arbitraria, e la seconda sia un parametro che serve ad individuare le singole geodetiche.

Ciò posto, pel teorema dimostrato alla fine dell'art. VII, R_1 è costante lungo ciascuna delle linee $\rho_1 = \text{cost.}$, anzi da ciò che si è esposto nel detto articolo (nonchè dall'ordinaria teoria delle sviluppate) risulta che si può sempre porre

$$-R_1 = \rho_1 \text{ *)},$$

purchè si determini convenientemente quella trajettoria dai punti della quale vengono contati gli archi geodetici ρ_1. Le espressioni dei due raggi principali di curvatura sono dunque

$$R_1 = -\rho_1, \qquad R_2 = -\rho_1 - \frac{1}{\frac{\partial \log h_2}{\partial \rho_1}}.$$

Se ora supponiamo che la superficie (S) sia tale che il valore di uno dei raggi di curvatura, R_2, sia in ciascun punto determinato con una legge costante dal valore dell'altro, cioè se supponiamo

$$R_2 = \varphi(R_1),$$

---

*) Si vedrà facilmente che R_1 e ρ_1 si prendono con segno contrario per restare in accordo colla convenzione che ha servito a fissare il segno della curvatura geodetica. Credo di dover qui far notare che il sig. LAMÉ (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXVIII) ha adottato la convenzione contraria. Io ho seguito l'esempio del sig. BERTRAND (*Traité de calcul différentiel*, §§ 509, 556, 739).

la seconda delle precedenti equazioni si potrà scrivere così:

$$\frac{\partial \log \frac{1}{h_2}}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)},$$

da cui si deduce

$$\frac{1}{h_2} = H e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}},$$

dove H è una funzione arbitraria di ρ_2, la quale può evidentemente supporsi uguale ad 1, senza limitare la generalità dei risultati, poichè ciò equivale a prendere per seconda variabile $\int H d\rho_2$ in luogo di ρ_2. Si ha dunque

$$\frac{1}{h_2} = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}} = \psi(\rho_1),$$

laonde il quadrato dell'elemento lineare della superficie (Σ) assume la forma

$$d\rho_1^2 + [\psi(\rho_1)]^2 d\rho_2^2,$$

da cui risulta che la superficie (Σ) è applicabile sopra una superficie di rivoluzione. Dunque: *i luoghi dei centri di curvatura di quelle superficie, in ciascun punto delle quali uno dei raggi di curvatura principali è una determinata funzione dell'altro, sono superficie applicabili tutte l'una sull'altra e sopra certe superficie di rivoluzione* *).

Reciprocamente, consideriamo una superficie di rivoluzione arbitraria (Σ). Il sistema di rette costituito dalle tangenti ai suoi meridiani è incontrato normalmente (art. VII) da una serie di superficie parallele (S), ciascuna delle quali possiede la proprietà che uno dei suoi raggi principali di curvatura, per es. R_2, è una funzione determinata dell'altro, R_1. Infatti uno di questi raggi, per es. R_1, può ritenersi eguale in lunghezza assoluta all'arco di meridiano ρ_1 contato da un certo parallelo e terminato al punto di contatto fra la superficie (Σ) e la normale secondo cui è diretto il raggio stesso. L'altro raggio di curvatura è eguale al precedente aumentato (o diminuito) del raggio di curvatura geodetica r_1 del parallelo condotto pel punto di contatto, il qual ultimo raggio avendo per misura la porzione di tangente al meridiano compresa fra questo punto di contatto e l'asse di rotazione, è una funzione del solo arco di meridiano ρ_1 e quindi anche del solo primo raggio R_1. Dunque ciascuno dei due raggi è in ogni punto determinato unicamente dall'altro.

---

*) Dal processo di dimostrazione risulta chiaramente che *in generale* le due falde della superficie dei centri non sono applicabili sopra *una medesima* superficie di rivoluzione. Questo si verificherebbe quando la relazione fra R_1 ed R_2 fosse simmetrica rispetto a queste due quantità.

Ciò posto se la superficie (Σ), supposta flessibile ed inestendibile, viene a mutare di forma, e se le tangenti ai suoi meridiani si considerano, durante questa flessione, come invariabilmente connesse alla superficie medesima, i punti in cui queste tangenti erano primitivamente incontrate da una delle superficie (S), continuano sempre ad avere per luogo geometrico una superficie ortogonale a tutte le tangenti anzidette (in virtù dei teoremi dati all'art. VI). Inoltre in ciascuno di questi punti i raggi principali di curvatura continuano sempre a coincidere coi segmenti che abbiamo denominati R_1 ed R_2, poichè la normale in M non cessa d'essere incontrata da due normali infinitamente vicine negli estremi a e C di quei segmenti, ossia in due punti la cui posizione non dipende che dall'arco ρ_1 e dalla curvatura geodetica r_1, quantità che non vengono alterate dalla flessione. È dunque manifesto che la relazione sussistente originariamente fra questi due raggi, continua ad avere luogo comunque s'infletta la superficie (Σ), e questa conclusione si mantiene vera fino a tanto che le flessioni della superficie (Σ) son tali da dar luogo realmente alla generazione di una superficie (S), ciò che, in generale, avviene per tutte le flessioni di cui la superficie (Σ) è suscettibile.

Dunque in generale *tutte le superficie applicabili sopra una data superficie di rivoluzione possono riguardarsi come luoghi dei centri di curvatura di altre superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni determinate l'uno dell'altro.*

Ma la conclusione in cui si fonda questa reciproca cessa d'essere esatta, quando la superficie (Σ) è tale, che *certe* sue flessioni rendono impossibile la generazione di una superficie ortogonale (S). Affinchè tale impossibilità si verifichi, bisogna che il sistema delle tangenti alle linee ρ_1 cessi d'occupare tutto lo spazio, e si riduca ad una famiglia di rette con *un* solo parametro arbitrario. Perchè ciò succeda bisogna evidentemente che le tangenti a ciascuna delle linee ρ_1 vengano a coincidere in una sola retta, cioè che le linee geodetiche ρ_1 possano, per certe flessioni della superficie (Σ), diventare linee rette. Bisogna dunque, in ultima analisi, che la superficie (Σ) sia sovrapponibile ad una superficie rigata. Ora è noto che il quadrato dell'elemento lineare d'ogni superficie rigata, a generatrici rettilinee reali, può mettersi sotto la forma:

$$ds^2 = d\rho_1^2 + [(\rho_1 - \alpha)^2 + \beta^2]\, d\rho_2^2,$$

dove ρ_1 è la lunghezza di una porzione di generatrice rettilinea, contata da una trajettoria ortogonale fissa, ρ_2 è un parametro che distingue le varie generatrici, α e β sono due funzioni della sola variabile ρ_2. Affinchè tale espressione coincida con quella dell'elemento d'una superficie di rivoluzione, colla condizione che le generatrici rettilinee si sovrappongano ai meridiani, bisogna evidentemente che α e β sieno quantità costanti: ciò che corrisponde ad una special classe di superficie rigate applicabili sull'elicoide a piano direttore e sulla superficie di rivoluzione d'area minima. Confron-

tando la forma speciale che assume in questo caso la funzione $\psi(\rho_1)$, cioè

$$\psi(\rho_1) = \sqrt{(\rho_1 - \alpha)^2 + \beta^2},$$

col valore

$$\psi(\rho_1) = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}},$$

si perviene facilmente all'equazione

$$(R_1 + \alpha)(R_2 + \alpha) = -\beta^2,$$

la quale esprime, come è manifesto, che la superficie (S) è parallela e distante della quantità α da una superficie di curvatura costante e negativa $-\frac{1}{\beta^2}$. Siccome le infinite superficie parallele ad una data hanno tutte i medesimi luoghi dei centri di curvatura, così si vede che il caso di eccezione ora discusso corrisponde a quelle relazioni fra i due raggi principali di curvatura della superficie (S) alle quali può servire di tipo la seguente:

$$R_1 R_2 = -a^2 \; {}^{*)}.$$

Dal fin quì detto concludiamo, col sig. WEINGARTEN, che *in generale ogni superficie applicabile sopra una data superficie di rivoluzione può considerarsi come il luogo dei centri di curvatura di un'altra superficie, in ciascun punto della quale i due raggi principali di curvatura hanno fra loro una determinata relazione, dipendente dalla forma del meridiano della superficie data. Nel solo caso in cui questa sia la superficie di rivoluzione d'area minima, per ottenere tutte le superficie sovr'essa applicabili, bisogna associare agli anzidetti luoghi dei centri di curvatura, una special classe di superficie rigate.*

Osserveremo per ultimo che l'integrale indefinito

$$\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}$$

introduce in ψ come fattore una costante arbitraria. Nei casi particolari accade spesso (come vedremo) che il valore di questa costante venga limitato dalla condizione che la superficie rappresentata dall'espressione

$$ds^2 = d\rho_1^2 + [\psi(\rho_1)]^2 d\rho_2^2$$

sia reale.

---

*) Le superficie a curvatura costante negativa sono state recentemente l'oggetto d'interessanti ricerche per parte del sig. DINI. Alcuni dei suoi risultati sono consegnati nei Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LX (1865), pag. 340.

XX.

Chiamiamo R'_1, R'_2 i raggi principali di curvatura della superficie di rivoluzione fin quì denominata (Σ), sulla quale sono applicabili le evolute delle superficie definite dall'equazione

$$R_2 = \varphi(R_1),$$

e propriamente sia R'_1 il raggio di curvatura del meridiano, R'_2 quello della sezione normale al meridiano. Indichiamo inoltre con ψ il raggio del parallelo della superficie (Σ), il quale è una funzione nota dell'arco di meridiano ρ_1, avendosi dall'articolo precedente

$$\psi = e^{\int \frac{d\rho_1}{\rho_1 + \varphi(-\rho_1)}}.$$

Da formole notissime si deducono facilmente per R'_1, R'_2 i valori seguenti:

$$R'_1 = -\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\rho_1}\right)^2}}{\frac{d^2\psi}{d\rho_1^2}}, \qquad R'_2 = \frac{\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\psi}{d\rho_1}\right)^2}},$$

in cui il radicale dev'esser preso positivamente. Ora, ponendo per brevità,

$$\frac{d\varphi(-\rho_1)}{d\rho_1} = \varphi',$$

si ha

$$\frac{d\psi}{d\rho_1} = \frac{\psi}{\rho_1 + \varphi}, \qquad \frac{d^2\psi}{d\rho_1^2} = -\frac{\psi\varphi'}{(\rho_1 + \varphi)^2},$$

dunque sostituendo si ottiene

$$R'_1 = \frac{(\rho_1 + \varphi)\sqrt{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}}{\psi\varphi'},$$

$$R'_2 = \frac{(\rho_1 + \varphi)\psi}{\sqrt{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}}.$$

Da questi valori si trae

$$(55) \qquad R'_1 R'_2 = \frac{(\rho_1 + \varphi)^2}{\varphi'}, \qquad \frac{R'_1}{R'_2} = \frac{(\rho_1 + \varphi)^2 - \psi^2}{\psi^2\varphi'}.$$

Queste formole determinano i raggi principali della superficie di rivoluzione (Σ), in funzione di ρ_1. Eliminando questa variabile si ottiene la relazione costante che sus-

siste in ogni punto fra i raggi stessi. Reciprocamente, se si ammette fra R'_1 ed R'_2 una relazione determinata, eliminandone queste due quantità col mezzo delle formole precedenti, si ottiene un'equazione alle derivate del prim'ordine fra ρ_1 e la funzione incognita φ, integrando la quale si perviene ad assegnare la forma della funzione $\varphi(R_1)$, ossia la relazione che deve sussistere fra i due raggi principali di curvatura di una superficie affinchè una delle sue evolute sia applicabile sopra una classe di superficie di rivoluzione caratterizzata dalla prescritta relazione fra R'_1 ed R'_2; colla condizione però che le linee geodetiche luoghi dei centri di curvatura sulle evolute stesse si dispongano secondo i meridiani di quest'ultima superficie *).

Per dare un esempio di questi due processi, ne faremo l'applicazione alla ricerca delle evolute e delle evolventi delle superficie di curvatura costante.

Incominciando dalla prima quistione, poniamo

$$R_1 R_2 = \pm k^2,$$

intendendo per k una quantità positiva. In questo caso si ha

$$\varphi(R_1) = \pm \frac{k^2}{R_1},$$

quindi

$$\varphi(-\rho_1) = \mp \frac{k^2}{\rho_1},$$

da cui

$$\varphi' = \pm \frac{k^2}{\rho_1^2}, \qquad \rho_1 + \varphi = \frac{\rho_1^2 \mp k^2}{\rho_1}, \qquad \psi = \frac{\sqrt{\rho_1^2 \mp k^2}}{c},$$

dove c è una costante arbitraria, che supponiamo positiva. Dall'attuale valore di ψ si cava

$$\frac{d\psi}{d\rho_1} = \frac{\rho_1}{c\sqrt{\rho_1^2 \mp k^2}},$$

e siccome il primo membro esprime il coseno dell'angolo che la normale alla superficie (Σ) fa coll'asse di rotazione, così si deve avere

$$\frac{\rho_1^2}{c^2(\rho_1^2 \mp k^2)} < 1$$

ossia

$$(c^2 - 1)\rho_1^2 > \pm c^2 k^2.$$

---

*) Questa restrizione è imposta dalle circostanze nelle quali si verifica il teorema del sig. WEINGARTEN. Ma da questo stesso teorema emerge che quando questa restrizione vien tolta, non ha più luogo in generale la proprietà che i due raggi principali della superficie evolvente sieno funzioni l'uno dell'altro.

Ne risulta che quando la superficie primitiva (S) ha la curvatura costante *positiva*, bisogna che si abbia sempre $c^2 > 1$.

Dai valori trovati precedentemente si deduce, per le (55),

$$R'_1 R'_2 = \pm \frac{(\rho_1^2 \mp k^2)^2}{k^2}, \qquad 1 + \frac{R'_1}{R'_2} = \pm \frac{(c^2 - 1)(\rho_1^2 \mp k^2)}{k^2}.$$

La prima di queste due formole mostra che la curvatura della superficie (Σ) ha lo stesso segno di quella della superficie (S). Eliminando ρ_1 fra le due ultime equazioni si ha

$$\left(1 + \frac{R'_1}{R'_2}\right)^2 = \pm \left(\frac{c^2 - 1}{k}\right)^2 R'_1 R'_2,$$

equazione la quale esprime la relazione che lega i raggi di curvatura principali della superficie di rivoluzione su cui sono applicabili le evolute delle superficie di curvatura costante $\pm \frac{1}{k^2}$.

Se la costante c si può prendere eguale all'unità, l'equazione precedente si riduce alla semplicissima

$$R'_1 + R'_2 = 0,$$

la quale caratterizza, come è noto, le superficie d'area minima. Ora noi abbiamo veduto che quando la curvatura della superficie (S) è positiva si ha necessariamente $c^2 > 1$. Quando invece la curvatura anzidetta è negativa si può sempre render nullo il binomio $c^2 - 1$. Dunque: *le evolute delle superficie di curvatura costante negativa sono applicabili sulla superficie di rivoluzione d'area minima,* teorema che si era già presentato alla fine dell'articolo precedente, e che venne pure notato dai signori WEINGARTEN *) e DINI **).

Fatta astrazione da questo caso particolare, non sembra che la natura della relazione trovata fra R'_1, R'_2, alla quale si può dare anche la forma

$$\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right)^2 = \pm \left(\frac{c^2 - 1}{k}\right)^2 \frac{R'_2}{R'_1},$$

sia suscettibile di ricevere una interpretazione geometrica abbastanza semplice.

Passiamo ora a trattare il problema inverso, cioè a ricercare le evolventi delle superficie di curvatura costante. E qui gioverà rammentare innanzi tutto, per evitare ogni equivoco, che il metodo di cui ci serviamo, non può fornire se non quella classe di evolventi alla quale si applica la restrizione precedentemente accennata riguardo al caso generale.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIX (1861), pag. 382.

**) Comptes rendus, t. LX, l. c. nell'art. prec.

Supponiamo dunque che le quantità R'_1, R'_2 sieno legate dalla relazione

$$R'_1 R'_2 = \pm k^2,$$

la quale, in virtù della prima formola (55), conduce all'equazione alle derivate

$$\frac{(\rho_1 + \varphi)^2}{\varphi'} = \pm k^2.$$

Introduciamo una funzione ausiliare λ di ρ_1, ponendo

$$\rho_1 + \varphi = \mp \frac{k^2 \lambda'}{\lambda}.$$

Facendo questa sostituzione, l'equazione precedente si trasforma in quest'altra

$$\lambda'' = \mp \frac{\lambda}{k^2}.$$

Prendiamo dapprima il segno superiore, che corrisponde al caso della curvatura positiva. In tale ipotesi si deduce da questa equazione

$$\lambda = A e^{\frac{i\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{i\rho_1}{k}},$$

dove A e B sono costanti arbitrarie. Questo valore di λ conduce immediatamente a quello di φ. Si ha infatti

$$\varphi(-\rho_1) = -\rho_1 - ik \frac{A e^{\frac{i\rho_1}{k}} - B e^{-\frac{i\rho_1}{k}}}{A e^{\frac{i\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{i\rho_1}{k}}},$$

e quindi, introducendo i due raggi di curvatura dell'evolvente,

$$R_2 - R_1 = -ik \frac{A e^{-\frac{iR_1}{k}} - B e^{\frac{iR_1}{k}}}{A e^{-\frac{iR_1}{k}} + B e^{\frac{iR_1}{k}}},$$

Se si astrae dal caso in cui le costanti A e B sono tutte due eguali a zero, bisogna ammettere che nessuna di esse sia nulla, poichè nel caso contrario la differenza $R_2 - R_1$ sarebbe immaginaria. Poniamo dunque

$$\frac{B}{A} = M e^{2im}, \qquad m + \frac{R_1}{k} = \mu,$$

dove M ed m sono due costanti reali. Sostituendo si ottiene

$$R_2 - R_1 = i k \frac{M e^{2i\mu} - 1}{M e^{2i\mu} + 1},$$

ossia

$$R_2 - R_1 = \frac{i k (M^2 - 1) - 2 k M \operatorname{sen} 2\mu}{M^2 + 2 M \cos 2\mu + 1}.$$

Di qui risulta che affinchè la quantità $R_2 - R_1$ sia reale bisogna che si abbia $M^2 - 1 = 0$. Prendendo $M = -1$ si ha

$$R_2 - R_1 = \frac{k \operatorname{sen} 2\mu}{1 - \cos 2\mu} = k \operatorname{cotg} \mu,$$

ossia

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{cotg}\left(m + \frac{R_1}{k}\right),$$

od anche, surrogando alla costante m l'altra costante $\frac{\pi}{2} - m$,

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{tg}\left(m - \frac{R_1}{k}\right).$$

Tale è la relazione che ha luogo fra i raggi principali delle evolventi delle superficie di curvatura costante e positiva $\frac{1}{k^2}$, nel caso che consideriamo.

Indicando con $\frac{1}{r}$ la curvatura geodetica della linea $\rho_1 = \text{cost.}$ ossia $R_1 = \text{cost.}$ tracciata sulla superficie (Σ), abbiamo trovato, al principio dell'articolo precedente,

$$r = R_2 - R_1.$$

Confrontando questo valore coll'equazione precedente, si ha la formola

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{tg}\left(m + \frac{\rho_1}{k}\right)},$$

che somministra la curvatura geodetica dei paralleli della nostra superficie (Σ), ossia, in generale, di quelle fra le linee tracciate sopra una superficie di curvatura costante positiva $\frac{1}{k^2}$, le quali possono diventare, mercè la flessione di questa, paralleli di una superficie di rivoluzione *).

*) Queste linee si possono riguardare come *circonferenze geodetiche*, ossia come trajettorie ortogonali delle infinite linee geodetiche divergenti da un punto fisso. La curvatura geodetica di ciascuna di queste linee, sulle superficie di curvatura costante, è la stessa in ogni loro punto. Vedi MINDING, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. VI (1830), pag. 161.

Il valore della costante m dipende dalla curvatura geodetica della linea dalla quale si contano gli archi ρ_1, ovvero i raggi R_1, la quale è una linea cuspidale della superficie evolvente. Indicandone la curvatura con $\frac{1}{r_0}$ si ha

$$r_0 = k \operatorname{tg} m.$$

Se la superficie (Σ) incontra l'asse di rivoluzione si può prendere $r_0 = 0$, purchè si contino gli archi ρ_1 dal punto in cui la superficie incontra l'asse. In questa ipotesi si ha $m = 0$, e quindi

$$R_1 - R_2 = k \operatorname{tg} \frac{R_1}{k}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{tg} \frac{\rho_1}{k}}.$$

Quest'ultima formola coincide con quella che porge la curvatura geodetica di una curva sferica, quando si intenda per ρ_1 il raggio sferico della curva nel punto considerato *). È agevole concepire la ragione di questa coincidenza se si riflette che la nostra superficie (Σ) è applicabile sopra una sfera di raggio k.

Del resto è chiaro che mutando R_1 ed R_2 in $R_1 + \alpha$, $R_2 + \alpha$ si ottiene lo stesso risultato che variando convenientemente il valore di m, donde risulta che i differenti valori che si possono dare a questa costante corrispondono ad altrettante famiglie di superficie parallele tra loro. Basta adunque attribuire ad m un valore determinato, associando poi alle superficie ottenute in quest'ipotesi tutte le loro parallele. Nell'ipotesi testè ammessa si può scegliere il valore $m = 0$, al quale corrisponde la relazione semplice

$$R_1 - R_2 = k \operatorname{tg} \frac{R_1}{k}.$$

Passando ora al caso della curvatura costante negativa, si ha, dall'equazione in λ,

$$\lambda = A e^{\frac{\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{\rho_1}{k}},$$

da cui

$$\varphi = -\rho_1 + k \frac{A e^{\frac{\rho_1}{k}} - B e^{-\frac{\rho_1}{k}}}{A e^{\frac{\rho_1}{k}} + B e^{-\frac{\rho_1}{k}}}$$

*) Cioè il raggio sferico del circolo osculatore in questo punto. Vedi BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, § 545.

e quindi

$$R_2 - R_1 = k \frac{Ae^{-\frac{R_1}{k}} - Be^{\frac{R_1}{k}}}{Ae^{-\frac{R_1}{k}} + Be^{\frac{R_1}{k}}}.$$

In questo secondo caso l'integrale particolare che risulta dal supporre nulla una delle costanti non conduce, come nel precedente, ad un risultato immaginario. A questo integrale corrisponde la relazione semplicissima

$$R_2 - R_1 = \pm k,$$

dalla quale, conservando ad r il significato precedente, si trae

$$r = \pm k.$$

Quest'ultima formola c'insegna che fra le superficie di rivoluzione su cui sono applicabili le superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{k^2}$, ve ne sono alcune nelle quali *tutti* i paralleli hanno la medesima curvatura geodetica. Ora il raggio della curvatura geodetica di un parallelo non è altro, come già abbiamo osservato, che la porzione di tangente al meridiano in un punto del parallelo considerato, compresa fra questo punto di contatto e l'asse di rotazione. Dunque le anzidette superficie sono applicabili sopra una superficie di rivoluzione il cui meridiano è la linea dalle tangenti di lunghezza costante (uguale a k). Questo risultato è ben noto ai geometri *), ma le considerazioni precedenti ci conducono alle seguenti altre conseguenze:

Le evolute delle superficie le quali hanno in ogni punto costante ed uguale a k la differenza dei loro raggi di curvatura principali, sono superficie di curvatura costante negativa uguale a $-\frac{1}{k^2}$. *Le geodetiche inviluppate su queste evolute dalle normali delle evolventi possono trasformarsi, mediante un'opportuna flessione delle evolute stesse, nei meridiani di una superficie di rivoluzione, ed acquistano allora la proprietà di avere le tangenti* (terminate all'asse) *di lunghezza costante uguale a k.*

Questo teorema avrebbe anche potuto essere stabilito mediante considerazioni analoghe a quelle sviluppate nell'articolo precedente. Infatti da queste emerge chiaramente che le superficie ortogonali al sistema delle rette tangenti ai meridiani della superficie di rivoluzione generata dalla curva del sig. LIOUVILLE hanno la proprietà di

---

*) Veggasi LIOUVILLE, Nota IV all'*Application de l'analyse à la géométrie* di MONGE (Paris, 1850), pag. 583, e un interessante lavoro del sig. CODAZZI negli Annali di Scienze Matematiche e fisiche (di TORTOLINI), t. VIII (1857), pag. 346.

avere costante la differenza dei raggi di curvatura principali. Ora se si riguardano quelle rette come invariabilmente connesse all'anzidetta superficie, in ogni flessione di questa esse danno luogo (pel teorema dell'art. VI) ad una nuova serie di superficie ortogonali, nelle quali la proprietà suenunciata non cessa mai di verificarsi.

In tal modo siamo pervenuti ad assegnare la generazione di una classe completa di superficie, la quale finora non pare che sia stata l'oggetto di speciali ricerche, ed il cui carattere distintivo consiste nell'avere costante dovunque la differenza dei raggi principali di curvatura. Una particolarità di questa classe di superficie sta in ciò che la proprietà che le serve di definizione è comune a tutte le superficie parallele ad una qualunque di quelle che ne sono dotate, cosicchè la conoscenza di una fra esse conduce immediatamente a determinarne un'intera famiglia. Limitandoci per ora ad aver toccato dei principii che possono servire di base a questa ricerca, riserviamo ad un'altra occasione il più adeguato sviluppo della medesima.

Quando nessuna delle due costanti A e B è nulla, si può porre

$$\frac{A}{B} = \pm e^{2m},$$

e si ottiene

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{tgh}\left(m - \frac{R_1}{k}\right),$$

oppure

$$R_2 - R_1 = k \operatorname{ctgh}\left(m - \frac{R_1}{k}\right),$$

secondo che si prende il segno superiore o l'inferiore. (Le segnature tgh, ctgh rappresentano la tangente e la cotangente iperbolica). In corrispondenza a queste due formole si ha, per la curvatura geodetica dei paralleli,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{tgh}\left(m + \frac{\rho_1}{k}\right)},$$

oppure

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k \operatorname{ctgh}\left(m + \frac{\rho_1}{k}\right)}.$$

Anche in questo caso si può dare ad m un valore particolare ed associare alle superficie comprese nell'equazione risultante tutte quelle che sono ad esse parallele.

Le relazioni trovate fra R_1 ed R_2 nei varii casi che abbiamo discorsi, risolvono, entro i limiti già dichiarati, il secondo dei problemi che ci eravamo proposti.

XXI.

Abbiamo dati al principio dell'art. XVIII i valori delle quantità $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, curvature geodetiche di due sistemi di curve ortogonali $\rho_1 = \text{cost.}$, $\rho_2 = \text{cost.}$, assunte come coordinate curvilinee.

Il calcolo diretto del valore di $\frac{1}{r}$, curvatura geodetica di un sistema qualunque $\rho = \text{cost.}$ riferito a coordinate curvilinee arbitrarie u e v, non è molto semplice. Ma la considerazione dei secondi parametri differenziali conduce prontamente alla determinazione di questo valore. Rammentiamo infatti che dalle (48) si ha, mutando le h_1, h_2 in k_1, k_2 (giacchè riterremo in avvenire, come nell'art. XIV, $h_1 = \Delta_1 u$, $h_{12} = \nabla u v$, $h_2 = \Delta_1 v$),

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1 k_2 \frac{\partial \frac{k_1}{k_2}}{\partial \rho_1},$$

ossia

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1 \left(k_1 k_2 \frac{\partial \frac{1}{k_2}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial k_1}{\partial \rho_1} \right)$$

e quindi, per le (52'),

$$\Delta_2 \rho_1 = k_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\partial k_1}{\partial \rho_1} \right).$$

Se ne ricava

$$(55')\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{\Delta_2 \rho_1}{k_1} - \frac{\partial k_1}{\partial \rho_1}, \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{\Delta_2 \rho_2}{k_2} - \frac{\partial k_2}{\partial \rho_2}, \end{aligned} \right.$$

la seconda essendo ottenuta con un analogo procedimento, e quindi, in virtù delle (45),

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\Delta_2 \rho_1}{k_1} - \frac{\nabla \rho_1 k_1}{k_1^2},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\Delta_2 \rho_2}{k_2} - \frac{\nabla \rho_2 k_2}{k_2^2}.$$

In queste ultime formole le due funzioni ρ_1, ρ_2 compajono *separatamente* l'una dall'altra, insieme coi rispettivi parametri differenziali, il cui valore è, come sappiamo, indipendente dal sistema delle coordinate a cui si riferiscono. Applicando dunque ad un sistema qualsivoglia $\rho(u, v) = \text{cost.}$ ed alla rispettiva curvatura geodetica $\frac{1}{r}$ la rela-

espressa dall'una o dall'altra delle due formole precedenti, e ponendo $\Delta_1 \rho = k$, tiene la formola generale

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \rho}{k} - \frac{\nabla \rho k}{k^2},$$

ossia

$$(56) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \rho}{k} + \nabla \frac{\rho}{k},$$

intendendo colla scrittura $\nabla \frac{\rho}{k}$ che l'operazione ∇ (art. XIV) dev'essere eseguita sulle due funzioni ρ ed $\frac{1}{k}$. Per abbreviare lo sviluppo di questa ultima formola poniamo

$$(57) \qquad \begin{cases} h_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial u} + h_{12} \frac{\partial \rho}{\partial v} = m, \qquad h_{12} \frac{\partial \rho}{\partial u} + h_2^2 \frac{\partial \rho}{\partial v} = n, \\ \sqrt{h_1^2 h_2^2 - h_{12}^2} = H, \end{cases}$$

si ottiene così, per le (36), (49),

$$\frac{1}{r} = \frac{H}{k} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{m}{H} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{n}{H} \right) + m \frac{\partial \frac{1}{k}}{\partial u} + n \frac{\partial \frac{1}{k}}{\partial v},$$

o più semplicemente

$$(58) \qquad \frac{1}{r} = H \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{m}{Hk} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{n}{Hk} \right) \right].$$

Tale è l'espressione generale di $\frac{1}{r}$, ridotta alla sua forma più semplice e più comoda nelle applicazioni. Nondimeno, per poter verificare l'identità della medesima con altre formole note, ci conviene assoggettarla ad una ulteriore trasformazione.

In primo luogo introduciamo in luogo delle h_1^2, h_{12}, h_2^2 le E, F, G, ed osserviamo che in virtù delle (37), (40), si ha

$$\frac{m}{H} = \frac{M}{T}, \qquad \frac{n}{H} = \frac{N}{T},$$

e che, ponendo per brevità

$$P = \sqrt{E \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \rho}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial u} + G \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)^2} = \sqrt{M \frac{\partial \rho}{\partial u} + N \frac{\partial \rho}{\partial v}},$$

si ha pure

$$Tk = P,$$

per cui la (58) può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{P}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{N}{P}\right) \text{*)}. \tag{58'}$$

Indicando per semplicità cogli indici 1, 2 le derivazioni parziali relative ad u ed a v, si ottiene dapprima

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{PT}\left(M_1+N_2-\frac{MP_1+NP_2}{P}\right),$$

da cui, surrogando per P_1 e P_2 i valori

$$P_1=\frac{1}{2P}(M\rho_{11}+N\rho_{12}+M_1\rho_1+N_1\rho_2),$$

$$P_2=\frac{1}{2P}(M\rho_{12}+N\rho_{22}+M_2\rho_1+N_2\rho_2),$$

si passa all'espressione

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2P^3T}\Big\{2P^2(M_1+N_2)-[M^2\rho_{11}+2MN\rho_{12}+N^2\rho_{22}$$
$$+(MM_1+NM_2)\rho_1+(MN_1+NN_2)\rho_2]\Big\}.$$

Sostituendo i valori di M_1, N_1, M_2, N_2 e facendo qualche riduzione nei coefficienti delle derivate seconde di ρ, si trova poscia:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{P^3T}\Big\{(P^2G-M^2)\rho_{11}-2(P^2F+MN)\rho_{12}+(P^2E-N^2)\rho_{22}$$
$$+(M\rho_1+N\rho_2)[(G_1-F_2)\rho_1+(E_2-F_1)\rho_2]$$
$$-\tfrac{1}{2}\rho_1[M(G_1\rho_1-F_1\rho_2)+N(G_2\rho_1-F_2\rho_2)]-\tfrac{1}{2}\rho_2[M(E_1\rho_2-F_1\rho_1)+N(E_2\rho_2-F_2\rho_1)]\Big\}.$$

Da ultimo, calcolando i valori delle quantità GP^2-M^2, FP^2+MN, EP^2-N^2 e raccogliendo i fattori M ed N, che si trovano in tutti i termini non contenenti de-

---

*) Questa formola è già stata data dal sig. BONNET, nell'art. IX del *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* [Journal de Mathématiques pures et appliqués (2ème série), t. V (1860), pag. 153].

rivate seconde, si ottiene il seguente valore finale:

$$(59)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{r}=&\frac{1}{(E\rho_2^2-2F\rho_2\rho_1+G\rho_1^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{EG-F^2}}\Big\{(EG-F^2)(\rho_1^2\rho_{22}-2\rho_1\rho_2\rho_{12}+\rho_2^2\rho_{11})\\&+(G\rho_1-F\rho_2)\left[\left(\tfrac{1}{2}G_1-F_2\right)\rho_1^2+E_2\rho_1\rho_2-\tfrac{1}{2}E_1\rho_2^2\right]\\&+(E\rho_2-F\rho_1)\left[\left(\tfrac{1}{2}E_2-F_1\right)\rho_2^2+G_1\rho_2\rho_1-\tfrac{1}{2}G_2\rho_1^2\right]\Big\}.\end{aligned}\right.$$

In particolare per le linee $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ si ha

$$(60)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{r_u}&=\frac{1}{2T\sqrt{G}}\left(\frac{\partial G}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right),\\\frac{1}{r_v}&=\frac{1}{2T\sqrt{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right),\end{aligned}\right.$$

formole in cui riterremo positivi i valori di $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$, per restare in accordo colla convenzione fatta nell'art. XVIII rispetto al segno delle curvature geodetiche.

Dall'espressione generale (59) si passa subito a quella in cui invece delle derivate parziali di ρ entrano i differenziali primi e secondi di u, v relativi ad uno spostamento infinitesimo lungo una delle linee del sistema che si considera. Infatti si ha

$$\rho_2=-\frac{\rho_1\,du}{dv},\qquad \rho_{11}du^2+2\rho_{12}du\,dv+\rho_{22}dv^2=\frac{\rho_1(du\,d^2v-dv\,d^2u)}{dv},$$

da cui

$$E\rho_2^2-2F\rho_2\rho_1+G\rho_1^2=\frac{\rho_1^2ds^2}{dv^2},$$

$$\rho_1^2\rho_{22}-2\rho_1\rho_2\rho_{12}+\rho_2^2\rho_{11}=\frac{\rho_1^3(du\,d^2v-dv\,d^2u)}{dv^3},$$

e quindi

$$(61)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{r}=&\frac{1}{(Edu^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{EG-F^2}}\Big\{(EG-F^2)(du\,d^2v-dv\,d^2u)\\&+(E\,du+F\,dv)\left[\left(F_1-\tfrac{1}{2}E_2\right)du^2+G_1\,du\,dv+\tfrac{1}{2}G_2\,dv^2\right]\\&-(F\,du+G\,dv)\left[\left(F_2-\tfrac{1}{2}G_1\right)dv^2+E_2\,du\,dv+\tfrac{1}{2}E_1\,du^2\right]\Big\}\ ^{*)}.\end{aligned}\right.$$

*) È bene notare che ponendo successivamente $du=0$, $dv=0$, si ottengono da questa formola valori di $\frac{1}{r_u}$, $\frac{1}{r_v}$ i cui segni non pajono accordarsi con quelle delle (60). Ma è facile vedere che in realtà questi segni restano indeterminati per la presenza del radicale ds^3. Noi ci atterremo ai valori (60) per la ragione già addotta.

Questa espressione coincide (dopo lo sviluppo delle moltiplicazioni accennate fra le parentesi) con quella che venne data dal sig. MINDING *).

Noi sappiamo (art. XVIII) che per le linee geodetiche la curvatura geodetica è eguale a zero. Dalla precedente equazione si può quindi ricavare l'equazione differenziale delle linee geodetiche sotto la sua forma più generale: basta fare $\frac{1}{r}=0$. Noi non istaremo a trascrivere quest'equazione, che raramente può riuscire più comoda di quella data da GAUSS (*Disquisitiones generales*, etc., art. XVIII).

Partendo dall'espressione (61) è facile risalire al significato geometrico della quantità $\frac{1}{r}$. Infatti, siccome le coordinate curvilinee u, v sono intieramente arbitrarie, così noi possiamo, dopo aver riferita la superficie a tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, supporre $u=x$, $v=y$. In tale ipotesi, ponendo al solito,

$$dz=p\,dx+q\,dy,\qquad dp=r\,dx+s\,dy,\qquad dq=s\,dx+t\,dy,$$

si ha

$$dx^2+dy^2+dz^2=(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2,$$

da cui

$$E=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,$$

$$EG-F^2=1+p^2+q^2,$$

$$E\,du+F\,dv=dx+p\,dz,\qquad F\,du+G\,dv=dy+q\,dz,$$

$$\left(F_1-\tfrac{1}{2}E_2\right)du^2+G_1\,du\,dv+\tfrac{1}{2}G_2\,dv^2=q(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2),$$

$$\left(F_2-\tfrac{1}{2}G_1\right)dv^2+E_2\,du\,dv+\tfrac{1}{2}E_1\,du^2=p(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2).$$

Osservando dunque che

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y,$$

si ha, dalla sostituzione,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ds^3\sqrt{1+p^2+q^2}}\Big[(1+p^2+q^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)$$
$$+(q\,dx-p\,dy)(d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y)\Big],$$

ovvero, per una facile trasformazione,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ds^3\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[-p(dyd^2z-dzd^2y)-q(dzd^2x-dxd^2z)+dxd^2y-dyd^2x\right].$$

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. VI (1830), pag. 160. Nell'ultimo termine della formola del sig. MINDING bisogna scrivere $\frac{\partial E}{\partial q}dp$ in luogo di $\frac{\partial E}{\partial q}dq$.

Ora chiamando a, b, c i coseni degli angoli che la normale alla superficie fa coi tre assi, α, β, γ quelli degli angoli fatti coi medesimi assi dalla normale al piano osculatore della curva tracciata sovr'essa, con R il raggio di curvatura della curva stessa, si ha, come è notissimo,

$$a = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad b = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\alpha = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}R, \qquad \beta = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3}R, \qquad \gamma = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}R,$$

dunque

$$\frac{1}{r} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{R},$$

ossia

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{R},$$

indicando con θ l'angolo che il piano osculatore della curva fa col piano tangente la superficie. È questa la notissima formola che porge la curvatura geodetica di una curva tracciata sopra una superficie. La natura dell'espressione da cui venne dedotta pone fuori di dubbio la proprietà che ha questo ente, di rimanere invariabile in tutti i cambiamenti di forma di cui è suscettibile la superficie data, riguardata come flessibile ed inestendibile *).

XXII.

Applichiamo le formole generali trovate nell'articolo precedente ad alcune quistioni particolari.

Supponiamo primieramente che le coordinate sieno geodetiche, e quindi che si abbia

$$h_1 = 1, \qquad h_{12} = 0;$$

in queste ipotesi si ha dalle (60)

$$\frac{1}{r_u} = h_2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_2}\right) = -\frac{\partial \log h_2}{\partial u}, \qquad \frac{1}{r_v} = 0,$$

valori che coincidono con quelli che abbiamo già trovati nell'art. XVIII.

Supponiamo che la curvatura geodetica delle linee $u = \text{cost.}$, le quali costituiscono

*) L'invariabilità della curvatura geodetica fu stabilita per la prima volta dal sig. MINDING, nella nota citata pocanzi.

sulla superficie un sistema di curve parallele, debba essere costante lungo ciascuna di esse. Affinchè ciò si verifichi, bisogna che r_u risulti funzione della sola u, ed in questo caso dall'espressione di r_u si deduce

$$\frac{1}{h_2} = V e^{\int \frac{du}{r_u}},$$

in cui V è una funzione della sola v. Se dunque si pone

$$V dv = dv_1,$$

il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$du^2 + e^{2\int \frac{du}{r_u}} dv_1^2.$$

Ora questa forma conviene all'elemento lineare di una superficie di rivoluzione, in cui u è l'arco del meridiano, contato da un parallelo fisso; dunque: *quando sopra una superficie esiste un sistema di curve parallele, tali che ciascuna di esse abbia la curvatura geodetica costante, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione, i cui paralleli sono le curve trasformate delle anzidette.*

Per esempio, nelle superficie elicoidali le eliche descritte dai varii punti della curva generatrice sono evidentemente curve parallele; d'altronde, per la simmetria del sistema, è altrettanto evidente che la curvatura di ciascuna elica è costante in ogni suo punto. Dunque: *ogni superficie elicoidale è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione* *).

Le conseguenze dell'ipotesi che abbiamo testè ammessa si possono enunciare anche in altro modo. Se il sistema $\rho_1 =$ cost. è formato di curve parallele, k_1 ossia $\Delta_1 \rho_1$ è (art. IV) una funzione della sola ρ_1, e dalla prima delle (55') si deduce

$$\frac{\Delta_2 \rho_1}{(\Delta_1 \rho_1)^2} = \frac{1}{k_1 r_1} + \frac{d \log k_1}{d \rho_1}.$$

Dunque, se la curvatura geodetica $\frac{1}{r_1}$ è costante lungo ciascuna delle curve parallele $\rho_1 =$ cost., la quantità

$$\frac{\Delta_2 \rho_1}{(\Delta_1 \rho_1)^2}$$

è funzione soltanto di ρ_1 e reciprocamente, epperò (art. XVI) le curve $\rho_1 =$ cost. sono

*) BOUR, *Théorie de la déformation des surfaces* [Journal de l'École Polytechnique, t. XXII, cahier 39 (1862), pag. 82]; BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, § 738.

isoterme. Dunque: *se sopra una superficie esiste un sistema di curve parallele, ciascuna delle quali abbia la curvatura geodetica costante, queste curve sono anche isoterme e la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione.* Si può anche dire che: *quando sopra una superficie esiste un sistema di curve isoterme, le quali sono in pari tempo curve parallele, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione i cui paralleli sono le curve trasformate delle anzidette.* Ovvero finalmente, rammentando (art. XVI) che se di due sistemi ortogonali l'uno è isotermo, è tale anche l'altro: *quando sopra una superficie esiste un sistema di linee geodetiche, che sieno in pari tempo linee isoterme, la superficie è sovrapponibile ad una superficie di rivoluzione, i cui meridiani sono le curve trasformate delle geodetiche anzidette.*

Applicheremo la proprietà ora considerata, sotto il suo penultimo enunciato, alla determinazione della forma che deve avere la funzione h di u e di v, affinchè l'espressione

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2} \tag{51}$$

convenga all'elemento di una superficie di rivoluzione. Per tal uopo osserviamo che se $\rho =$ cost. è un sistema di curve parallele, si ha (art. IV)

$$\Delta_1 \rho = F(\rho).$$

Dovendo questo sistema essere anche isotermo possiamo supporre (art. XVII) che ρ abbia la forma

$$\rho = \frac{\varphi(u + iv) + \psi(u - iv)}{2},$$

dove φ e ψ sono funzioni conjugate. Se ne deduce

$$\Delta_1 \rho = h\sqrt{\varphi' \psi'}$$

e quindi

$$h\sqrt{\varphi'\psi'} = F\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right).$$

Se la funzione h fosse data, quest'ultima equazione esprimerebbe una condizione imposta alle funzioni φ, ψ, la quale dovrebbe aggiungersi a quelle che derivano dalla natura stessa di queste funzioni. Ma poichè noi cerchiamo la forma che deve avere la funzione h, affinchè queste condizioni possano essere simultaneamente soddisfatte, è chiaro che basterà porre

$$h = \frac{F\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right)}{\sqrt{\varphi'\psi'}} \tag{62}$$

e riguardare come arbitraria la forma delle funzioni φ ed F. Si ottiene così, in virtù del teorema suaccennato, la richiesta forma generale della funzione h.

Se ne deduce agevolmente la curvatura geodetica delle linee ρ, considerate pocanzi. Infatti si ha dapprima

$$\Delta_1 \rho = h\sqrt{\varphi'\psi'} = F(\rho),$$

e quindi, osservando che $\Delta_2 \rho = 0$, ed applicando la (56),

$$\frac{1}{r} = \nabla \frac{\rho}{F} = (\Delta_1 \rho)^2 \frac{d\frac{1}{F}}{d\rho},$$

ossia

$$\frac{1}{r} = -\frac{dF}{d\rho}. \tag{63}$$

Quest'equazione serve a determinare la forma della funzione F quando si conosce il modo in cui r dipende dal parametro termometrico ρ.

XXIII.

Le espressioni del secondo parametro differenziale e della curvatura geodetica di un sistema qualunque di curve sono suscettibili di alcune trasformazioni utili a conoscersi, le quali passiamo ad esporre.

Per tal uopo consideriamo due sistemi ortogonali ρ_1 e ρ_2, e rappresentiamo con m_1, n_1, m_2, n_2 quantità analoghe alle m, n (57) e relative a questi due sistemi. Si ha dalla (49)

$$\Delta_2 \rho_2 = H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{m_2}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{n_2}{H}\right),$$

e le due equazioni che susseguono alle (45), osservate le (37), (40), diventano

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial u} = -\frac{n_1 k_2}{H k_1}, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial v} = \frac{m_1 k_2}{H k_1}.$$

Introducendo nelle m_2, n_2 questi valori di $\frac{\partial \rho_2}{\partial u}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial v}$, si trova

$$\frac{m_2}{H} = -\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial v}, \qquad \frac{n_2}{H} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial u},$$

e quindi, sostituendo nella precedente espressione di $\Delta_2\rho_2$,

$$\Delta_2\rho_2 = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)\right] \tag{64}$$

ovvero

$$\Delta_2\rho_2 = H\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{k_2}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{k_2}{k_1}}{\partial u}\right). \tag{64'}$$

Questa nuova espressione del secondo parametro differenziale è notevole massimamente per ciò che la funzione ρ_2, a cui esso si riferisce, non vi entra che col proprio parametro di prim'ordine k_2.

Rammentiamo ora la formola (58):

$$\frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m_2}{Hk_2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n_2}{Hk_2}\right)\right].$$

Dalle relazioni precedenti si trae

$$\frac{m_2}{Hk_2} = -\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}, \qquad \frac{n_2}{Hk_2} = \frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}$$

e quindi

$$\frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)\right], \tag{65}$$

ossia

$$\frac{1}{r_2} = H\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u}\right). \tag{65'}$$

Questa nuova formola somministra il valore della curvatura geodetica di un sistema di curve per mezzo di soli elementi relativi al sistema ortogonale.

Che una simile formola dovesse esistere, lo si poteva dedurre immediatamente dalla riflessione che un sistema di curve è perfettamente definito quando è dato il suo sistema ortogonale. Ma si poteva anche prevedere che questa espressione doveva contenere il fattore

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{k_1}}{\partial u}.$$

Infatti la curvatura geodetica di un sistema di curve $\rho_2 =$ cost. deve ridursi identicamente a zero quando il sistema ortogonale $\rho_1 =$ cost. è formato di curve parallele fra loro geodeticamente. Ora la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò abbia

luogo è (art. IV)

$$\frac{1}{k_1} = F(\rho_1),$$

dove F è una funzione indeterminata. Eliminando questa funzione si ha, quale condizione di parallelismo (equivalente a quella che precede),

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \frac{1}{k_1}}{\partial v} - \frac{\partial \rho_1}{\partial v} \frac{\partial \frac{1}{k_1}}{\partial u} = 0. \tag{66}$$

Poichè dunque il primo membro di quest'equazione si annulla identicamente insieme con $\frac{1}{r_2}$, bisogna che esso entri come fattore nell'espressione generale di quest'ultima quantità.

È bene far notare il significato che assume la precedente equazione (66), quando, riguardandosi la funzione ρ_1 come data arbitrariamente, essa non è soddisfatta che da una certa serie di valori delle u, v. In tal caso essa rappresenta una curva che ha con quelle del sistema $\rho_1 =$ cost. una connessione intima: essa è la *linea di stringimento* di questo sistema *). Infatti chiamando $\delta\sigma$ la distanza normale di due curve consecutive del sistema $\rho_1 =$ cost. nel punto (u, v), si ha (art. IV)

$$\delta\sigma = \frac{1}{k_1} \delta\rho_1.$$

La linea di stringimento è il luogo dei punti in cui $\delta\sigma$ è minimo. Dunque, riguardando $\delta\rho_1$ come costante, si deve avere lungo di essa

$$d\frac{1}{k_1} = \frac{\partial \frac{1}{k_1}}{\partial u} du + \frac{\partial \frac{1}{k_1}}{\partial v} dv = 0.$$

Ma le du, dv sono legate dalla relazione

$$d\rho_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} du + \frac{\partial \rho_1}{\partial v} dv = 0;$$

dunque l'equazione della linea di stringimento si ottiene eliminando $du : dv$ fra queste ultime equazioni, nel qual modo si ricade appunto sulla (66).

Ravvicinando quest'equazione alla formola (65') si conclude immediatamente il

*) Per l'esatta definizione di queste linee veggasi la parte prima della *Nota di Geometria Analitica* di BORDONI [Giornale dell'Istituto Lombardo e Biblioteca Italiana, t VI (1854), pag. 287].

seguente teorema: *la linea di stringimento di un sistema di curve tracciate sopra una superficie è il luogo dei punti in cui le curve componenti il sistema ortogonale al dato hanno la curvatura geodetica eguale a zero.*

Questa proprietà, della quale è facile rendersi ragione per via geometrica, è già stata notata rispetto alla linea di stringimento di un sistema di rette *). Giova osservare che se una curva tracciata sopra una superficie viene projettata sul piano che tocca questa superficie in uno dei punti in cui la curvatura geodetica della curva stessa è nulla, si ottiene una curva piana che ha un flesso nel punto di contatto.

Quando il sistema dato è formato di curve parallele, il teorema precedente non può più servire alla determinazione della linea di stringimento. Ma in questo caso è evidente che ciascuna trajettoria ortogonale possiede la proprietà caratteristica di siffatta linea.

Cerchiamo ora l'espressione della curvatura geodetica di un sistema di curve definite da un'equazione differenziale della forma

$$U\,du + V\,dv = 0. \tag{67}$$

Chiamando $\varkappa$ uno dei fattori che rendono integrabile il primo membro di questa equazione, possiamo prendere

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \varkappa U, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \varkappa V,$$

e quindi, ponendo per brevità,

$$Q = \sqrt{h_1^2 U^2 + 2h_{12} UV + h_2^2 V^2},$$

$$h_1^2 U + h_{12} V = U', \qquad h_{12} U + h_2^2 V = V',$$

si ha

$$k_1 = \varkappa Q,$$

da cui

$$\frac{1}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{U}{Q}, \qquad \frac{1}{k_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \frac{V}{Q},$$

$$\frac{m_1}{k_1} = \frac{U'}{Q}, \qquad \frac{n_1}{k_1} = \frac{V'}{Q}.$$

Sostituendo questi ultimi valori nella formola (58) si trova

*) BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* [Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 70].

$$(68) \qquad \frac{1}{r_1} = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U'}{HQ}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V'}{HQ}\right)\right],$$

espressione in cui non entrano più che le U, V.

La curvatura del sistema ortogonale $\rho_2 = \text{cost.}$ si ottiene immediatamente osservando che la formola (65) equivale a quest'altra

$$(69) \qquad \frac{1}{r_2} = H\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{Q}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{Q}\right)\right],$$

in cui parimenti non entrano più che le U, V.

Da quest'equazione, in virtù del precedente teorema, si deduce, per la linea di stringimento del sistema (67),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U}{Q}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{Q}\right) = 0 .$$

Per ultimo cerchiamo la condizione che deve verificarsi affinchè il sistema (67) sia isotermo. Essendo, nelle ipotesi precedenti,

$$m_1 = \varkappa U', \qquad n_1 = \varkappa V',$$

l'espressione del secondo parametro differenziale è

$$\Delta_2 \rho_1 = H\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varkappa U'}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varkappa V'}{H}\right)\right].$$

Ora affinchè il sistema (67) sia isotermo è evidentemente necessario e sufficiente che si possa assegnare al fattore $\varkappa$ un valor tale, che ne risulti $\Delta_2 \rho_1 = 0$, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varkappa U'}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varkappa V'}{H}\right) = 0 ,$$

equazione dalla quale bisogna eliminare $\varkappa$ mediante l'equazione

$$\frac{\partial(\varkappa U)}{\partial v} - \frac{\partial(\varkappa V)}{\partial u} = 0,$$

alla quale deve soddisfare ogni valore di $\varkappa$. Scrivendo queste due equazioni nel modo seguente:

$$V\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - U\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} ,$$

$$U'\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} + V'\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} = -H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{U'}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{V'}{H}\right),$$

se ne possono ricavare immediatamente i valori di $\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}$, $\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}$. In tal modo, ponendo per brevità

$$\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} = Z, \qquad H\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{U'}{H} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{V'}{H}\right) = W,$$

ed osservando che $UU' + VV' = Q^2$, si trova

$$\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} = \frac{ZV' - WU}{Q^2}, \qquad -\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} = \frac{ZU' + WV}{Q^2}.$$

Eliminando $\varkappa$ si ottiene

$$(70) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{ZU' + WV}{Q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ZV' - WU}{Q^2}\right) = 0.$$

Tale è la condizione cercata.

Nel caso delle coordinate isoterme, le due equazioni che hanno servito a stabilirla ricadono nelle notissime che esprimono essere il binomio $\varkappa(U + iV)$ una funzione di $u - iv$. Infatti supponendo che si abbia

$$\varkappa(U + iV) = 2\psi(u - iv)$$

e quindi

$$\varkappa(U - iV) = 2\varphi(u + iv),$$

(dove φ e ψ sono al solito funzioni conjugate) se ne deduce

$$\varkappa(U du + V dv) = (\psi + \varphi) du + \frac{\psi - \varphi}{i} dv = \varphi(du + i dv) + \psi(du - i dv),$$

epperò l'integrale dell'equazione proposta può riguardarsi come rappresentato dall'equazione

$$\int \varphi(u + iv)(du + i dv) + \int \psi(u - iv)(du - i dv) = \text{cost.},$$

la quale conviene appunto ad un sistema isotermo.

XXIV.

Passando ora a trattare delle funzioni *assolute* (art. XIII), osserveremo primieramente che una funzione di tal natura è subito trovata quando l'elemento lineare della superficie è posto sotto la forma (51). Infatti se (u, v), (u', v') sono due sistemi di

coordinate curvilinee isoterme relative ad una medesima superficie, talchè si abbia

$$\frac{du^2 + dv^2}{h^2} = \frac{du'^2 + dv'^2}{h'^2},$$

devono sussistere (art. XVII) fra queste due coppie di variabili due relazioni della forma

$$u' + iv' = \varphi(u + iv), \qquad u' - iv' = \psi(u - iv),$$

φ e ψ essendo due funzioni conjugate. Se ne deduce

$$du'^2 + dv'^2 = \varphi'\psi'(du^2 + dv^2)$$

e quindi

(71)
$$h' = h\sqrt{\varphi'\psi'},$$

da cui

$$\log h' = \log h + \tfrac{1}{2}\log\varphi' + \tfrac{1}{2}\log\psi'.$$

Ora le funzioni $\log\varphi'$, $\log\psi'$ soddisfanno all'equazione differenziale parziale $\Delta_2 f = 0$, dunque la relazione precedente dà luogo a quest'altra

(72)
$$\Delta_2 \log h' = \Delta_2 \log h\,.$$

Il primo membro di quest'equazione può riguardarsi come formato colle variabili u', v', il secondo colle u, v. Se dunque si osserva che in questa formola non resta più traccia delle relazioni fra i due sistemi di variabili, e che non vi figura alcuna funzione diversa da quella che caratterizza l'elemento lineare, si può senz'altro concludere (art. XIII) che:

la funzione $\Delta_2 \log h$ è una funzione assoluta.

Partendo da questo risultato e fondandosi sull'*invariabilità* del parametro Δ_2 (art. XV) è facile trovare l'espressione generale di questa funzione assoluta, che rappresenteremo con Θ. Si vedrà in tal modo ch'essa coincide colla nota formola di Gauss, e si otterrà così una dimostrazione analitica diretta e semplicissima di questa formola memorabile.

Continuando a designare con T la quantità $\sqrt{EG - F^2}$ e ponendo inoltre, per brevità,

$$\sqrt{E} = U, \qquad \frac{F + iT}{\sqrt{E}} = V, \qquad \frac{F - iT}{\sqrt{E}} = V',$$

si ha identicamente

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = (U\,du + V\,dv)(U\,du + V'dv).$$

Chiamiamo $\varkappa$, $\varkappa'$ i due fattori integranti (immaginarii conjugati) che rendono

$$\varkappa(U\,du + V\,dv) = du' + i\,dv', \qquad \varkappa'(U\,du + V'\,dv) = du' - i\,dv',$$

e quindi

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \frac{du'^2 + dv'^2}{\varkappa\varkappa'}.$$

Dalle cose premesse risulta che

$$\Theta = \Delta_2 \log \sqrt{\varkappa\varkappa'},$$

e siccome $\varkappa$ e $\varkappa'$ sono quantità conjugate, così è chiaro che per avere il valore di Θ basta calcolare la parte reale di $\Delta_2 \log \varkappa$, cioè (eq. 47) dell'espressione

$$\Delta_2 \log \varkappa = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - F\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - F\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\right)\right].$$

Ora il fattore d'integrazione $\varkappa$ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial(\varkappa U)}{\partial v} = \frac{\partial(\varkappa V)}{\partial u},$$

ossia alla seguente

$$U\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - V\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} + U_2 - V_1 = 0,$$

dove gli indici 1, 2 indicano, al solito, derivazioni parziali relative ad u ed a v. Rammentando i valori di U, V ed osservando che

$$V = \frac{F + iT}{U} = \frac{GU}{F - iT},$$

si vede facilmente che la precedente equazione può scriversi nei modi seguenti:

$$\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - F\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\right) = i\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - \frac{U(U_2 - V_1)}{T},$$

$$\frac{1}{T}\left(G\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - F\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}\right) = -i\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} + \frac{(F - iT)(U_2 - V_1)}{TU}.$$

Coll'ajuto di queste due relazioni si elimina immediatamente la funzione incognita $\varkappa$ dall'espressione di $\Delta_2 \log \varkappa$, e si ottiene

$$\Delta_2 \log \varkappa = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{(F - iT)(U_2 - V_1)}{TU} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{U(U_2 - V_1)}{T}\right].$$

Ora essendo

$$U_2 - V_1 = \frac{EE_2 + E_1F - 2EF_1}{2E\sqrt{E}} - i\frac{E_1F^2 + E^2G_1 - 2EFF_1}{2TE\sqrt{E}},$$

la parte reale di $(F - iT)(U_2 - V_1)$ risulta eguale a

$$\frac{E_2 F - E G_1}{2\sqrt{E}};$$

si ha dunque finalmente

$$(73)\quad \Theta = -\frac{1}{2T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]$$

È facile assegnare il significato geometrico di quest'espressione. Supponiamo che la superficie sia riferita (come nell'art. XXI) a tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, e poniamo

$$u = x, \qquad v = y, \qquad E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2:$$

in tale ipotesi si ha

$$T = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

e l'espressione precedente si trasforma in quest'altra

$$\Theta = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{qr}{T(1+p^2)} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{qs}{T(1+p^2)}\right].$$

Eseguendo le derivazioni e riducendo si trova

$$\Theta = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Ora il secondo membro di quest'equazione esprime, com'è notissimo, il prodotto reciproco dei raggi principali di curvatura della superficie. L'analisi precedente stabilisce dunque che questo prodotto rimane invariabile in ogni flessione della superficie medesima. In ciò consiste il celebre teorema dato per la prima volta da Gauss, nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, art. XIII.

La funzione assoluta che esprime (eq. 73) il valore di questo prodotto si converte nella formola di Gauss (l. c. art. XI) quando si eseguiscano tutte le derivazioni indicate, per cui sebbene priva di simmetria, essa ha sopra quella di Gauss il vantaggio della concisione. Essa è stata data per la prima volta, senza dimostrazione, dal sig. Liouville, in una Nota letta all'Accademia Francese nel 1851 *); venne poscia dimostrata dal sig. Chelini **), con un processo al tutto diverso dal precedente.

Lo stesso sig. Liouville ha indicato (l. c.) un'altra forma assai elegante e simme-

---

*) Inserita nel Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVI (1851), pag. 130.

**) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche (di Tortolini), t. II (1851), pag. 291.

trica dell'espressione di Θ, che è stata parimenti dimostrata dal sig. CHELINI. Essa si ottiene prontamente nel modo che segue. Dalle (60) si deduce

$$\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right) = \frac{\sqrt{E}}{r_v},$$

$$\frac{1}{2T}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\sqrt{G}}{r_u} + \frac{F}{T}\left(\frac{\partial \log F}{\partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v}\right).$$

Quindi la (73) diventa

$$\Theta = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{T}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)\right].$$

Ora chiamando ω l'angolo delle due curve $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, si ha, come è noto,

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \text{tg}\,\omega = \frac{T}{F},$$

quindi l'equazione precedente può scriversi

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_v}\right)\right]. \tag{74}$$

Tale è la seconda forma indicata dal sig. LIOUVILLE.

XXV.

La formola di GAUSS si può ottenere anche con un semplice processo di eliminazione che noi esporremo per il caso di un sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

Supponendo che le coordinate u, v sieno isoterme, le relazioni (39) diventano

$$k_1^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)^2\right],\quad k_2^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial v}\right)^2\right],\quad 0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial u}\frac{\partial \rho_2}{\partial u} + \frac{\partial \rho_1}{\partial v}\frac{\partial \rho_2}{\partial v}.$$

Introducendo una variabile ausiliaria ω, si possono sostituire a queste tre equazioni le quattro seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{k_1 \cos\omega}{h}, && \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = \frac{k_1 \,\text{sen}\,\omega}{h}, \\ &\frac{\partial \rho_2}{\partial u} = -\frac{k_2 \,\text{sen}\,\omega}{h}, && \frac{\partial \rho_2}{\partial v} = \frac{k_2 \cos\omega}{h}. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

Confrontando queste formole colle (40), (44), ovvero colle (43), si trova

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_1} = \frac{h \cos \omega}{k_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = \frac{h \operatorname{sen} \omega}{k_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_2} = -\frac{h \operatorname{sen} \omega}{k_2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = \frac{h \cos \omega}{k_2},$$

donde risulta che le derivate relative alle u, v sono legate a quelle relative alle ρ_1, ρ_2 dalle relazioni

$$(76) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos \omega \frac{\partial}{\partial u} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{k_1}{h} \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \\ -\operatorname{sen} \omega \frac{\partial}{\partial u} + \cos \omega \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{k_2}{h} \frac{\partial}{\partial \rho_2}, \end{aligned} \right.$$

coll'aiuto delle quali si possono facilmente eliminare dalle (75) le derivate di ρ_1, ρ_2 rapporto ad u, v e la variabile ausiliaria ω.

Infatti eliminando dapprima le ρ_1, ρ_2 si ottengono le seguenti equazioni:

$$\cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} + \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} = \cos \omega \frac{\partial \log \frac{k_1}{h}}{\partial v} - \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \log \frac{k_1}{h}}{\partial u},$$

$$-\operatorname{sen} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} + \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\left(\operatorname{sen} \omega \frac{\partial \log \frac{k_2}{h}}{\partial v} + \cos \omega \frac{\partial \log \frac{k_2}{h}}{\partial u} \right),$$

ovvero, in virtù delle (76),

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} = \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \log \frac{k_1}{h}}{\partial \rho_2}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \rho_2} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{\partial \log \frac{k_2}{h}}{\partial \rho_1};$$

quindi, eliminando ω,

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \frac{\partial \log k_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \log k_1}{\partial \rho_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \frac{\partial \log h}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \log h}{\partial \rho_2} \right),$$

ossia (art. XVI)

$$\Delta_2 \log h = k_1 k_2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \frac{\partial \log k_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \log k_1}{\partial \rho_2} \right) \right].$$

La forma di questa equazione ci avverte (art. XIII) che ambedue i suoi membri

sono espressioni equivalenti di una stessa funzione assoluta, la quale non è altro che la Θ dell'articolo precedente. Dunque

$$\Theta = k_1 k_2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial \log k_2}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \log k_1}{\partial \rho_2}\right)\right],$$

ovvero

$$\Theta = -k_1 k_2 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(k_1 \frac{\partial \frac{1}{k_2}}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(k_2 \frac{\partial \frac{1}{k_1}}{\partial \rho_2}\right)\right], \tag{77}$$

od anche, per le (52'),

$$\Theta = -k_1 k_2 \left(\frac{\partial \frac{1}{k_2 r_1}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \frac{1}{k_1 r_2}}{\partial \rho_2}\right).$$

Quest'ultima coincide con quella che si deduce dalla (74) ponendo $F = 0$.

Essa può scriversi, per le citate formole (52'), nel modo seguente:

$$k_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial \rho_1} + k_2 \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \rho_2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = -\Theta;$$

ora, indicando colle caratteristiche δ_1, δ_2 le variazioni che nascono da spostamenti effettuati lungo le linee $\rho_2 =$ cost., $\rho_1 =$ cost., si ha (art. XV)

$$k_1 = \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta_1 s_1}, \qquad k_2 = \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta_2 s_2},$$

dunque

$$\frac{\delta_1 \frac{1}{r_1}}{\delta_1 s_1} + \frac{\delta_2 \frac{1}{r_2}}{\delta_2 s_2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = -\frac{1}{R_1 R_2}. \tag{78}$$

Questa importante generalizzazione di una nota formola del sig. LAMÉ è dovuta al sig. OSSIAN BONNET *).

APPENDICE ALL'ART. XII.

Prima di abbandonare la teoria dei sistemi di rette distribuite nello spazio (qui trattata dentro i limiti convenienti all'oggetto delle presenti ricerche) non crediamo inutile di mostrare come dalla formola (9) si deduca la notissima proprietà caratteri-

*) Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 53.

stica delle rette normali ad una superficie, che è quella di formare due sistemi di superficie sviluppabili ortogonali fra loro.

L'equazione

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0,$$

già ottenuta nell'art. X, mostra che quando le x, y, z, anzichè essere variabili indipendenti (come ivi si è presupposto), dipendono da *due* parametri u e v, non vi sono che due direzioni secondo le quali si passa dal punto (u, v) ad un punto contiguo della superficie iniziale, in modo che la retta corrispondente al primo punto sia incontrata da quelle che immediatamente le succedono in queste due direzioni. Dunque le rette di ogni sistema semplice formano due serie di superficie sviluppabili, le quali determinano sulla superficie iniziale due famiglie di curve. Non nuoce alla generalità dei risultati il supporre che queste curve sieno le stesse u, v. In quest'ipotesi si hanno le due relazioni

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dalla prima di queste, scritta sotto la forma

$$\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial u} + \left(Z\frac{\partial x}{\partial u} - X\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial Y}{\partial u} + \left(X\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

e dalla

$$X\frac{\partial X}{\partial u} + Y\frac{\partial Y}{\partial u} + Z\frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

si deduce facilmente, indicando con H un fattore da determinarsi e ricordando le (7),

$$H\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - UX,$$

$$H\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} - UY,$$

$$H\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} - UZ.$$

Dalla seconda si ottiene analogamente

$$K\frac{\partial X}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}-VX,$$

$$K\frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial v}-VY,$$

$$K\frac{\partial Z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v}-VZ.$$

Sommando i quadrati delle prime tre equazioni, i prodotti delle prime colle seconde (membro a membro), ed i quadrati delle seconde, si ottengono le formole

$$H^2\left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2\right]=E-U^2,$$

$$HK\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)=F-UV,$$

$$K^2\left[\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2\right]=G-V^2.$$

I due fattori H e K non possono essere nulli ad un tempo, poichè in tale ipotesi si ricaverebbe dalle precedenti tre equazioni

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=(U\,du+V\,dv)^2,$$

risultato che non può verificarsi per alcuna superficie propriamente detta.

Dalle due prime terne di equazioni si deduce inoltre

$$H\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)=\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$K\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)=\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Dunque se le rette sono normali ad una medesima superficie, si deve avere, *in forza della* (9),

$$(H-K)\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)=0.$$

Ora è facile riconoscere che affinchè sussista quest'ultima equazione, bisogna che sia nullo il secondo fattore. Se H è differente da K, ciò è evidente. Nel caso che H sia

eguale a K, basta osservare che alla superficie assunta come iniziale si può sostituirne un'altra qualunque. Facendo questa sostituzione, le X, Y, Z rimangono le stesse, ma le x, y, z diventano altre funzioni delle u, v. Ora è chiaro che in questo modo si può sempre rendere H differente da K. Per esempio, se si prendesse per nuova superficie iniziale l'inviluppo di una delle famiglie di superficie sviluppabili, tutte le rette del sistema sarebbero tangenti ad essa, epperò, chiamando x', y', z' le sue coordinate, H', K', U', V' i valori corrispondenti di H, K, U, V, si avrebbe

$$\frac{\frac{\partial x'}{\partial u}}{X} = \frac{\frac{\partial y'}{\partial u}}{Y} = \frac{\frac{\partial z'}{\partial u}}{Z} = \frac{X\frac{\partial x'}{\partial u} + Y\frac{\partial y'}{\partial u} + Z\frac{\partial z'}{\partial u}}{X^2 + Y^2 + Z^2} = U',$$

da cui

$$\frac{\partial x'}{\partial u} - U'X = 0,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial u} - U'Y = 0,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial u} - U'Z = 0,$$

e quindi $H' = 0$. In questo caso è certo che K' non potrebbe essere parimente uguale a zero, e perciò non si avrebbe $H' = K'$.

Dunque l'ipotesi che le rette sieno tutte normali ad una medesima superficie conduce necessariamente alla condizione

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0.$$

Ciò posto consideriamo una sfera di raggio 1, col centro nell'origine delle coordinate, e immaginiamo condotti i raggi paralleli alle rette del sistema. A ciascuna retta corrisponde in tal modo un punto della sfera avente per coordinate X, Y, Z; ed alle due famiglie di superficie sviluppabili corrispondono due famiglie di curve sferiche ($u =$ cost., $v =$ cost.), le quali, come è manifesto, formano in ciascun punto lo stesso angolo delle due superficie sviluppabili che si intersecano lungo la retta corrispondente a quel punto. L'equazione precedente esprime evidentemente che le due famiglie di curve sferiche sono ortogonali: dunque anche le anzidette due famiglie di superficie sviluppabili sono fra loro ortogonali, ossia *i due piani che passano per una retta qualunque e per le due rette infinitamente vicine dalle quali essa è incontrata sono perpendicolari fra loro.* È questa la proprietà caratteristica, enunciata per la prima volta da Monge, nella Memoria citata all'art. X.

L'ultima equazione, combinata con una delle precedenti, dà

$$F = UV,$$

equazione semplicissima, che può tener luogo della (9) quando le curve u, v sieno quelle particolari di cui abbiamo fatto scelta.

X.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VI (1864), pp. 271-279.

Sia

$$\frac{dx}{dy} = \varphi(y)$$

l'equazione differenziale di un sistema di curve, riferite a due assi ortogonali Ox, Oy. Dalla forma speciale di quest'equazione risulta immediatamente che le curve del sistema da essa rappresentato non differiscono fra loro che nella posizione, altro non essendo che una sola e medesima curva spostata parallelamente all'asse della x. Ciò premesso consideriamo la superficie di rivoluzione generata da una qualunque di queste curve, col girare intorno all'asse delle x, e sieno R_1 il raggio di curvatura del meridiano, R_2 quello della sezione normale al meridiano, cioè la porzione di normale compresa fra il meridiano e l'asse. Da note formole si ha

$$R_1 = -\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi'}, \qquad R_2 = -\frac{y\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi},$$

donde

$$R_1 R_2 = \frac{y(1+\varphi^2)^2}{\varphi\varphi'}.$$

Consideriamo ora il sistema delle curve ortogonali alle precedenti. La sua equa-

zione differenziale è evidentemente

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\varphi(y)},$$

e quindi chiamando R'_1 ed R'_2 due quantità analoghe alle R_1, R_2 e relative alle superficie di rivoluzione generate dalle seconde curve, nei punti corrispondenti allo stesso valore di y, si ottiene immediatamente il valore di $R'_1 R'_2$ mutando φ in $-\frac{1}{\varphi}$ nell'espressione di $R_1 R_2$ dianzi trovata. In tal modo risulta

$$R'_1 R'_2 = -\frac{y(1+\varphi^2)^2}{\varphi\varphi'},$$

cioè

$$R'_1 R'_2 = -R_1 R_2.$$

Il teorema contenuto in questa formola può enunciarsi come segue:

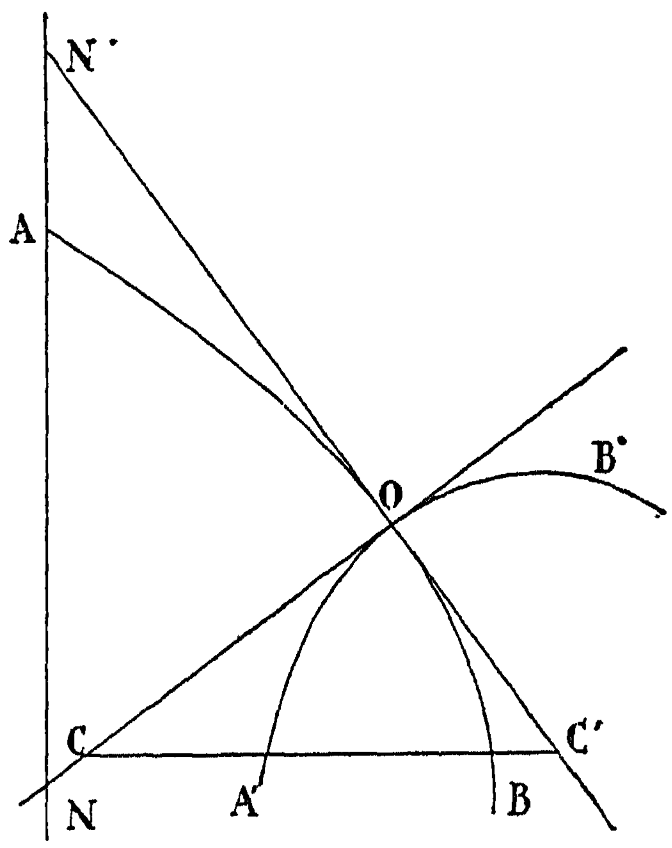
Se si considerano le diverse posizioni di una superficie di rivoluzione successivamente spostata lungo il proprio asse, e si determina una nuova superficie di rivoluzione avente lo stesso asse, ed ortogonale a tutte le precedenti, la misura della curvatura di quest'ultima superficie è eguale in valore assoluto e di segno contrario a quella di una delle superficie precedenti, nei punti del parallelo comune ad entrambe.

Da questo teorema risulta, come caso particolare, che spostando lungo il proprio asse una superficie di rivoluzione di curvatura costante e positiva uguale ad $\frac{1}{k^2}$, e determinando le superficie di rivoluzione aventi lo stesso asse ed ortogonali alla precedente, considerata nelle sue diverse posizioni, la curvatura di una qualunque di queste seconde superficie è parimente costante, ma negativa ed uguale a $-\frac{1}{k^2}$. Quando la prima superficie è una sfera, il meridiano della seconda è evidentemente la curva dalle tangenti di lunghezza costante: in tal guisa siamo condotti al noto ed elegante teorema del sig. LIOUVILLE *). In generale si vede che, in virtù del teorema precedente, i meridiani delle superficie di rivoluzione a curvatura costante, positiva nelle une, negativa nelle altre, sono in certo modo conjugati a due a due.

Consideriamo di nuovo un meridiano di forma qualunque ed il suo conjugato (nel senso testè dichiarato). I centri di curvatura di queste due curve nel punto ad esse comune hanno fra loro una relazione semplicissima. *Essi si trovano sopra una stessa retta perpendicolare all'asse di rotazione.* Infatti sia AB il meridiano primitivo, $A'B'$ il suo conjugato. Sieno ON', ON le rispettive loro tangenti nel punto comune O,

*) Nota IV all'*Application de l'Analyse à la Géometrie* di MONGE, Paris 1850.

terminate all'asse. Sia C il centro di curvatura della prima curva, nel punto O. Si conduca la retta CC', perpendicolare all'asse di rotazione NN', fino ad incontrare in



C' la tangente alla prima curva. I due triangoli simili ONN', OCC', dànno

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{ON}{ON'},$$

ossia

$$OC.ON = OC'.ON',$$

relazione che equivale a quest'altra

$$R_1 R_2 = R'_1 R'_2,$$

salva la differenza nel segno, la quale proviene da ciò che non si è tenuto conto delle direzioni *relative* dei due raggi di curvatura della prima o della seconda superficie.

Rispetto alla curva dalle tangenti di lunghezza costante si ottiene da quanto precede la seguente semplicissima costruzione (nota): *nel punto dato sulla curva si conduca la tangente e la normale, e dal punto in cui la prima retta incontra l'asse si conduca una perpendicolare a quest'asse: l'intersezione di questa perpendicolare colla normale è il centro di curvatura della curva nel punto considerato.*

La superficie di rivoluzione generata da questa curva possiede una proprietà notevolissima, la quale consiste in ciò che *quando essa viene trasformata per via di flessione* (supponendola al solito inestendibile) *in un'altra superficie di rivoluzione, per modo che i meridiani primitivi si trasformino nei meridiani della nuova superficie, questa è assolutamente identica alla prima,* null'altro accadendo se non che quei punti che appartenevano dapprima ad un parallelo d'un certo raggio, passano a far parte di un altro parallelo, di raggio maggiore o minore.

Infatti il raggio della curvatura geodetica di ciascun parallelo rimane inalterato nella flessione: d'altronde questo raggio è la lunghezza della porzione di tangente al meridiano, nel punto del parallelo considerato, compresa fra questo punto e l'asse; dunque questa lunghezza rimane la stessa, in ogni punto del meridiano, prima e dopo la flessione. Ma prima della flessione questa lunghezza era, per la natura della curva meridiana, costante in ogni punto, dunque essa deve esser tale anche dopo la flessione, cioè la nuova curva meridiana ha anch'essa le tangenti di lunghezza costante ed eguale a quella della prima. D'altra parte è facile riconoscere, dalla nota forma dell'equazione differenziale di questa specie di curve (e dalla stessa loro generazione), che ad una data lunghezza della tangente corrisponde una curva unica, poichè i varii valori della costante introdotta dall'integrazione non fanno che spostare questa curva lungo l'asse.

Si può domandare: esistono altre superficie di rivoluzione dotate della medesima proprietà? Ecco come si può rispondere a questa dimanda.

Siano sempre x, y le coordinate rettangole della curva meridiana, s il suo arco, Ox l'asse di rivoluzione. Considerando y come una funzione di s, ed indicando con θ l'angolo che il meridiano variabile fa con un meridiano fisso, si ha per il quadrato dell'elemento lineare della superficie la nota espressione

$$ds^2 + y^2 d\theta^2 .$$

Se questa superficie si trasforma colla flessione in un'altra superficie di rivoluzione, i cui meridiani sieno le curve trasformate dei meridiani primitivi, y e θ divengono y_1 e θ_1, s rimane invariato, ed eguagliando le espressioni di due elementi corrispondenti si ha

$$ds^2 + y^2 d\theta^2 = ds^2 + y_1^2 d\theta_1^2 ,$$

cioè

$$y\, d\theta = y_1\, d\theta_1 ,$$

da cui, per essere y, y_1 funzioni della sola s, si trae

$$y_1 = my , \qquad m\theta_1 = \theta + n ,$$

dove m ed n sono costanti arbitrarie. Indicando dunque con x_1 l'ascissa della nuova curva meridiana, si ha

$$dy_1 = m\frac{dy}{ds}\sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} ,$$

e quindi

$$x_1 + c = \int \sqrt{\left(\frac{1}{m\dfrac{dy}{ds}}\right)^2 - 1}\; dy_1 ,$$

intendendo sostituito nel secondo membro, prima di effettuare l'integrazione, il valore di s espresso per y_1, fornito dalla $y_1 = my(s)$.

Affinchè la nuova curva coincida colla primitiva, è chiaro che dopo questa sostituzione bisogna che l'espressione soggetta al vincolo integrale non contenga più la costante m. Ciò richiede che si abbia

$$\frac{d}{dm}\left(m\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{dy}{ds} + m\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dm} = 0.$$

Ma dalla $y_1 = my$ si cava

$$y + m\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dm} = 0;$$

dunque, eliminando $\frac{ds}{dm}$, si ha

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - y\frac{d^2y}{ds^2} = 0,$$

da cui, integrando,

$$\frac{y\,ds}{dy} = -r.$$

Ora è facile riconoscere che il primo membro di quest'equazione rappresenta il valore della porzione di tangente compresa fra il punto di contatto e l'asse delle x; *dunque la superficie di rivoluzione generata dalla curva avente le tangenti di lunghezza costante (uguale ad r) è la sola che goda della proprietà in discorso.*

Abbiamo prefisso alla costante r (che supponiamo positiva) il segno negativo, perchè è chiaro che la curva di cui ci occupiamo ha per asintoto l'asse delle x, al quale va accostandosi indefinitamente da ambe le parti; essa ha inoltre una cuspide che corrisponde all'ordinata $y = r$, donde risulta che facendo passare per questo punto l'asse delle y, e contando gli archi s dal punto stesso, nel senso delle x positive, gli incrementi ds e dy sono di segno contrario per quella metà della curva che giace nella regione delle coordinate positive.

Dall'ultima equazione si deduce, nelle ipotesi ammesse,

$$s = r\log\frac{r}{y}.$$

Inoltre si ha

$$-r\,dy = y\,ds = y\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

da cui

$$dx = -\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}dy,$$

che è l'equazione differenziale conosciuta. Noi prendiamo il radicale positivamente. Integrando, e determinando opportunamente la costante, se ne deduce

$$x + \sqrt{r^2 - y^2} = r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y},$$

e quindi

$$s - x = \sqrt{r^2 - y^2} - r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{r},$$

da cui, ponendo $y = 0$,

$$\lim_{x=\infty} (s - x) = r(1 - \log 2).$$

Abbiamo dunque il teorema seguente:

La differenza fra la lunghezza (infinita) *della curva dalle tangenti costanti e quella* (parimente infinita) *del suo asse è finita ed eguale a* $2r(1 - \log 2)$, r *essendo la lunghezza costante delle tangenti.*

Chiamiamo $S(x_0, x_1)$ l'area della porzione di superficie di rivoluzione generata dalla linea in discorso, compresa fra i paralleli corrispondenti alle ascisse positive x_0, x_1 $(x_1 > x_0)$. Si ha

$$S(x_0, x_1) = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y\, ds = -2\pi r \int_{y_0}^{y_1} dy = 2\pi r(y_0 - y_1).$$

È evidente la coincidenza di questa espressione con quella della superficie di una zona sferica di raggio r, avente per altezza $y_0 - y_1$.

Rappresentiamo analogamente con $V(x_0, x_1)$ il volume del solido contenuto fra la superficie anzidetta e due piani paralleli, condotti normalmente all'asse nei punti corrispondenti alle ascisse positive x_0, x_1. Si ha

$$V(x_0, x_1) = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx = -2\pi \int_{y_0}^{y_1} y\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \tfrac{2}{3}\pi [(r^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}} - (r^2 - y_0^2)^{\frac{3}{2}}].$$

Quest'espressione coincide visibilmente con quella del volume compreso fra due superficie cilindriche di raggi y_0 ed y_1, aventi lo stesso asse, ed una superficie sferica di raggio r avente il centro su quest'asse.

Per avere la superficie ed il volume relativi all'intiera superficie di rivoluzione, estesa indefinitamente da ambe le parti, nel senso dell'asse, basta porre $y_0 = r$, $y_1 = 0$ e raddoppiare i risultati. Si ottiene in tal guisa

$$S = 4\pi r^2, \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Dunque:

Il solido di rivoluzione generato dalla linea delle tangenti di lunghezza costante uguale ad r, *ha la stessa superficie e lo stesso volume di una sfera di raggio* r.

Chiamiamo ξ, η le coordinate del centro di curvatura della curva che abbiamo fin qui considerata. Dalla costruzione precedentemente richiamata si ha facilmente

$$\xi = x + \sqrt{r^2 - y^2}, \qquad \eta = \frac{r^2}{y},$$

e quindi

$$\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - r^2}}{r} = \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y}.$$

Per questi valori l'equazione finita della curva, eliminandone x ed y, dà

$$\frac{\xi}{r} = \log \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - r^2}}{r},$$

da cui si deduce

$$\eta = \frac{r}{2}\left(e^{\frac{\xi}{r}} + e^{-\frac{\xi}{r}}\right),$$

equazione di una catenaria. Tale è dunque l'evoluta della curva dalle tangenti costanti uguali ad r. Questo risultato conosciuto poteva anche essere dedotto a priori da un teorema del sig. WEINGARTEN, intorno al quale può vedersi l'articolo XIX delle mie *Ricerche di analisi applicata alla geometria* *).

Si possono determinare facilmente anche le evolventi della curva dalle tangenti costanti.

Infatti supponiamo che il punto comune a questa curva e ad una delle sue evolventi sia quello che corrisponde al valore s_0 dell'arco s. Chiamando ξ, η le coordinate dell'evolvente, si trovano le relazioni

$$\xi = x - (s - s_0)\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}, \qquad \eta = y + (s - s_0)\frac{y}{r}.$$

Ma si aveva

$$\frac{y}{r} = e^{-\frac{s}{r}},$$

da cui

$$\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{r}}}, \quad \log\frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y} = \frac{s}{r} + \log\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{r}}}\right),$$

epperò

$$x = s + r\log\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{r}}}\right) - r\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{r}}}.$$

---

*) Giornale di Matematiche, vol. III (1865), pag. 18; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 162.

Eliminando dunque le x, y dalle espressioni trovate per ξ, η, si ha

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = s + r\log\left(1+\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}\right) - (s - s_0 + r)\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}\\ \eta = (s - s_0 + r)e^{-\frac{s}{r}}.\end{array}\right.$$

Tutte le curve rappresentate da queste due equazioni hanno una cuspide nel punto che corrisponde al valore $s = s_0$, tranne quella che si ottiene facendo $s_0 = 0$ e le cui equazioni sono (mutando ξ in $-\xi$, per avere il ramo situato nella regione delle coordinate positive)

$$\left\{\begin{array}{l}\xi = (s + r)\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}} - s - r\log\left(1+\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}\right),\\ \eta = (s + r)e^{-\frac{s}{r}}.\end{array}\right.$$

Se in queste equazioni si fa $s = \infty$, e se si osserva che per questo valore si ha

$$\lim s\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}\right) = 0,$$

si trova un risultato che venne già dimostrato precedentemente.

Le superficie di rivoluzione generate dalle evolventi della curva dalle tangenti costanti hanno tutte una proprietà molto interessante, la quale consiste in ciò che la differenza dei loro raggi di curvatura principali è la stessa in ciascun punto, ed eguale alla lunghezza costante delle tangenti della curva anzidetta. Ciò risulta immediatamente dall'osservare che il raggio di curvatura del meridiano ha per valore $s - s_0$, mentre quello della sezione normale al meridiano, cioè la porzione di normale compresa fra il meridiano e l'asse, ha per valore $s - s_0 + r$.

Riferendo queste superficie di rivoluzione a tre assi ortogonali delle x, y, z, assumendo quello delle z per asse di rotazione, e chiamando θ l'angolo che un meridiano qualunque fa col meridiano xz, si hanno per le superficie in discorso le equazioni

$$x = (s - s_0 + r)e^{-\frac{s}{r}}\cos\theta,$$

$$y = (s - s_0 + r)e^{-\frac{s}{r}}\operatorname{sen}\theta,$$

$$z = s + r\log\left(1+\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}\right) - (s - s_0 + r)\sqrt{1-e^{-\frac{2s}{r}}}.$$

La misura della curvatura di queste superficie, nel punto definito dai valori delle due variabili s e θ, è

$$\frac{1}{(s - s_0)(s - s_0 + r)}.$$

Dalle considerazioni esposte nelle già citate *Ricerche* risulta che la classe completa delle superficie determinate dalla condizione di avere in ogni punto costante ed uguale ad r la differenza dei raggi principali di curvatura, è generabile nel modo seguente.

Si immagini la superficie di rivoluzione avente per meridiano la curva le cui tangenti hanno la lunghezza costante r, e si concepisca che questa superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, prenda successivamente tutte le forme conciliabili colla sua natura. In ciascuna di queste forme, il sistema delle rette tangenti alle curve trasformate dei meridiani primitivi è suscettibile di essere attraversato ortogonalmente da una serie di superficie, per le quali ha luogo appunto l'enunciata proprietà.

Tutte le superficie *reali*, dotate di questa proprietà, sono comprese nella generazione ora esposta; donde risulta, invocando l'ordinaria teoria delle superficie evolute, che la determinazione finita della detta classe di superficie dipende da quella delle superficie la cui curvatura è costante e negativa. Infatti supponiamo che le equazioni

$$x = x(s, \theta), \qquad y = y(s, \theta), \qquad z = z(s, \theta)$$

rappresentino una di queste ultime superficie, s essendo l'arco di una delle geodetiche trasformate dei meridiani, e θ un parametro atto a distinguere queste geodetiche, per es. l'angolo che si è già rappresentato colla stessa lettera. In tali ipotesi, indicando con X, Y, Z le coordinate della superficie evolvente, si hanno le equazioni

$$X = x + (s - s_0)\frac{dx}{ds}, \qquad Y = y + (s - s_0)\frac{dy}{ds}, \qquad Z = z + (s - s_0)\frac{dz}{ds}.$$

Dando ad s_0 tutti i valori possibili si ottiene una serie di superficie parallele, dotate tutte della proprietà d'avere costante la differenza dei raggi principali di curvatura.

Le forme generali delle funzioni $x(s, \theta)$, $y(s, \theta)$, $z(s, \theta)$ non hanno ancora potuto essere determinate *); ma è chiaro che ciascuna delle forme note dà luogo ad una serie di superficie della specie da noi considerata. Tali sarebbero per es. quelle corrispondenti agli elicoidi trovati recentemente dal sig. DINI **). Per non uscire dall'argomento principale di questa Nota, ci accontenteremo d'aver date le equazioni finite delle superficie di rivoluzione appartenenti alla classe di cui parliamo.

Pisa, 14 aprile 1865.

---

*) Intorno alla teoria delle superficie la cui curvatura è costante, ricordiamo un elegante lavoro del sig. CODAZZI negli Annali di Scienze matematiche e fisiche (del TORTOLINI), t. VIII (1857), pag. 346.

**) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LX (1865), pag. 340.

XI.

SULLA FLESSIONE DELLE SUPERFICIE RIGATE *).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VII (1865), pp. 105-138.

Le ammirabili ricerche istituite da GAUSS sulla teoria generale delle superficie, da lui consegnate in due Memorie divenute giustamente celebri **), hanno aperto la via alla soluzione di alcuni problemi, nei quali le superficie stesse sono considerate sotto un punto di vista essenzialmente diverso da quello dei geometri che lo aveano preceduto, tra i quali, per non ricordare che i sommi, citerò EULERO e MONGE. Infatti mentre questi aveano riguardate le superficie come limiti dei corpi, epperò come enti che non possono subire nello spazio altri spostamenti che quelli comuni ai solidi da esse terminati, GAUSS fu tratto naturalmente, dal suo metodo di applicare l'analisi allo studio delle superficie, a considerarle altresì come solidi in cui una delle dimensioni è vanescente; in tal modo, supponendo che questi nuovi enti geometrici sieno suscettibili di essere inflessi, ma non d'essere estesi o contratti, è chiaro che gli spostamenti

*) La prefazione a questa Memoria è tolta dalla Nota dell'A. *Intorno alla flessione delle superficie rigate,* letta all'Ateneo di Venezia il 10 agosto 1865, Nota che non viene qui riprodotta per intero, perchè contiene solo un riassunto della Memoria più estesa stampata nel testo. [N. d. R.].

**) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche...* Memoria premiata dall'Accademia di Copenhagen nel 1822 e pubblicata per la prima volta da SCHUMACHER nelle *Astronomische Abhandlungen.* — *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* Memoria pubblicata nel t. VI delle *Commentationes recentiores* dell'Accademia di Gottinga (1828).

delle loro parti sono, entro certi limiti, indipendenti fra loro, e lo studio di questi spostamenti relativi non ha più niente di comune con quello degli spostamenti assoluti di una superficie rigida, quale si era sempre supposta nelle ricerche anteriori.

Queste stesse ricerche aveano però già offerto un caso, particolarissimo invero, relativo alla teoria delle superficie flessibili e inestendibili: voglio dire quello delle superficie *sviluppabili* od applicabili esattamente sopra di un piano, le quali è notissimo di quanto uso sieno in molteplici quistioni così della matematica pura come dell'applicata. Ed è anzi strano che prima di GAUSS nessuno, che io sappia, avesse pensato a generalizzare il concetto nuovo che queste superficie, riguardate come flessibili, introducevano spontaneamente nella geometria. Checchè ne sia è certo che, fatta astrazione dal caso semplicissimo che or ora ho menzionato, la teoria delle superficie flessibili presenta gravissime difficoltà, le quali debbono invitare i geometri a farne oggetto di diligente studio. L'importanza e la bellezza del teorema fondamentale col quale GAUSS ha inaugurato questo nuovo ramo di analisi, non lascia dubbio alcuno che altri teoremi di eguale o maggiore fecondità non sieno per essere il premio di chi saprà penetrare più addentro in questa spinosa quistione.

La difficoltà della quale, per quanto mi sembra, procede principalmente da ciò, che non possedendo noi una chiara idea del modo in cui, nel caso generale, può effettuarsi la flessione di una superficie curva, anco in un tratto di poca estensione, siamo obbligati ad affidarci intieramente alla nuda analisi, partendo dalle formole che caratterizzano la inestendibilità; e non possiamo quasi mai giovarci di quelle considerazioni ausiliari, dirette od indirette, che, nella maggior parte degli ordinarii problemi di geometria analitica, conducono così prontamente ed elegantemente allo scopo finale.

La verità di questa osservazione mi sembra confermata dagli sviluppi in cui sto per entrare, e nei quali prendo a considerare più particolarmente le superficie generabili dal moto di una linea retta. In queste superficie, considerate come flessibili ed inestendibili, la difficoltà della quistione viene in gran parte rimossa dal fatto che, se si fa astrazione da quelle flessioni per effetto delle quali le generatrici primitive cessano d'essere rettilinee, ci è possibile avere un'idea assai chiara e facile del modo in cui la flessione può prodursi. Infatti ogni superficie di questa classe si può decomporre mentalmente in un numero infinito di zone infinitamente sottili, ciascuna compresa fra due generatrici contigue, e si può immaginare che la flessione della superficie avvenga mediante una rotazione infinitesima eseguita da ciascuna di queste zone intorno alla generatrice che essa ha in comune colla zona precedente. In tal guisa si rende palese che la nuova superficie proveniente da una determinata flessione è definita completamente dagli elementi che caratterizzano la superficie primitiva e dalla serie di valori delle successive rotazioni infinitesime accennate poc'anzi; anzi fino dal 1838 il valente geometra sig. MINDING aveva espresso per quadrature i valori delle tre coordinate della

superficie trasformata, introducendovi una funzione arbitraria, che rappresenta appunto la legge con cui si succedono quelle rotazioni.

La soluzione del sig. MINDING, che fu discussa di nuovo, in seguito, dai signori BONNET (1848) e BOUR (1860), è senza dubbio dotata di tutta la desiderabile generalità analitica. Ma la presenza di una funzione arbitraria nelle formole finali fa sì che, quando si deve determinare la natura della superficie trasformata dipendentemente da condizioni speciali prescritte *a priori*, si incontrano serie difficoltà di analisi. Cosicchè sembra che in questi casi sia di gran lunga più vantaggioso introdurre fin dal principio le condizioni prescritte alla trasformazione, in guisa da pervenire ad una soluzione particolare ad esse: processo non dissimile da quello che si suole seguire da lungo tempo in moltissimi rami dell'analisi, e mercè il quale si è resa possibile la risoluzione di molti problemi che, trattati coi metodi generali, presentavano assai maggiori difficoltà.

§ 1.

Rappresentiamo con ξ, η, ζ le coordinate ortogonali di una linea qualsivoglia tracciata sopra una superficie rigata, che riguarderemo come *direttrice* di questa superficie, e che assoggetteremo alla sola condizione di non confondersi con una delle generatrici rettilinee; con l, m, n i coseni degli angoli che la generatrice passante per il punto (ξ, η, ζ) fa coi tre assi, e con v la lunghezza della porzione di generatrice compresa fra il punto anzidetto ed un altro punto qualunque della generatrice stessa. La superficie potrà rappresentarsi colle equazioni

$$x=\xi+vl\,,\qquad y=\eta+vm\,,\qquad z=\zeta+vn\,,\tag{1}$$

in cui le l, m, n sono legate dalla solita relazione

$$l^2+m^2+n^2=1.\tag{2}$$

Noi supporremo tanto le l, m, n, quanto le ξ, η, ζ funzioni dell'arco u della direttrice, epperò avremo parimente la relazione

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1\,,\tag{3}$$

in cui gli accenti indicano derivate prese relativamente ad u.

Poniamo per brevità

$$\left\{\begin{aligned} l'\xi'+m'\eta'+n'\zeta' &= \varkappa\,,\\ l'^2+m'^2+n'^2 &= \varepsilon'^2\,,\end{aligned}\right.\tag{4}$$

e rappresentiamo con θ l'angolo formato dalla generatrice colla direttrice, cioè poniamo

$$l\xi'+m\eta'+n\zeta'=\cos\theta\,.\tag{5}$$

Quest'angolo, come gli altri che si presenteranno in seguito, sarà misurato nel senso in cui si procede dalla direzione positiva della direttrice (cioè da quella secondo cui cresce u) alla direzione positiva della generatrice (cioè a quella secondo cui cresce v).

Riguardando le u, v come coordinate curvilinee ed adottando le note segnature di GAUSS, si trova

$$E = 1 + 2\varkappa v + \varepsilon'^2 v^2, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1. \tag{6}$$

Supponendo ora che la superficie, considerata come flessibile ed inestendibile, venga a cambiare di forma, in modo però che le sue generatrici rettilinee si conservino tali, è chiaro che la direttrice si trasformerà in una certa altra curva, di cui indicheremo con ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate, nel punto corrispondente al punto (ξ, η, ζ), mentre le l, m, n si muteranno in l_1, m_1, n_1. Le variabili u, v avranno lo stesso valore nei punti corrispondenti delle due superficie, epperò affinchè l'elemento lineare sia, come dev'essere, identico per le due superficie, ossia affinchè le E, F, G sieno le medesime per l'una superficie e per l'altra, è evidentemente necessario e sufficiente che sussistano le tre equazioni

$$\begin{cases} l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon'^2, \\ l_1\xi_1' + m_1\eta_1' + n_1\zeta_1' = \cos\theta, \\ l_1'\xi_1' + m_1'\eta_1' + n_1'\zeta_1' = \varkappa, \end{cases} \tag{7}$$

alle quali debbonsi aggiungere le due seguenti

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \qquad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1. \tag{8}$$

Notiamo che per essere

$$(l\xi' + m\eta' + n\zeta')' = \varkappa + l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'',$$

si ha

$$l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'' = -(\varkappa + \theta' \operatorname{sen}\theta). \tag{9}$$

Ora chiamando ρ il raggio di curvatura della direttrice primitiva nel punto (u) ed ω l'angolo che questo raggio fa col piano tangente della superficie, si ha

$$l\xi'' + m\eta'' + n\zeta'' = \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho}, \tag{10}$$

quindi

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho} = -(\varkappa + \theta' \operatorname{sen}\theta). \tag{11}$$

Dunque all'ultima delle equazioni (7) si può, in virtù di quella che la precede,

sostituire la seguente:

$$\frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \tag{12}$$

la quale esprime che le curvature geodetiche delle due direttrici sono le stesse nei punti corrispondenti. Questo risultato poteva essere stabilito *a priori,* come conseguenza della nota proprietà fondamentale di queste curvature: ma il processo tenuto ci insegna, ciò che è assai importante pel nostro scopo, che le tre proprietà espresse dalle due prime equazioni (7) e dalla (12), come sono condizioni evidentemente *necessarie* per l'identità degli elementi lineari delle due superficie, così sono anche *sufficienti* a determinare questa identità.

Chiamando δw la minima distanza delle due generatrici infinitamente vicine corrispondenti ai valori u ed $u + \delta u$, si ha

$$\delta w = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'}\,\delta u, \quad \varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2 = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix}^2, \tag{13}$$

per cui la quantità sempre reale $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}$ non può essere nulla che quando la superficie è sviluppabile. Questa formola non sussiste, o, per meglio dire, diventa indeterminata per le superficie cilindriche, nelle quali si ha al tempo stesso $\varepsilon' = \varkappa = 0$: in questo caso particolarissimo si ha evidentemente

$$\delta w = \delta u \operatorname{sen}\theta. \tag{13'}$$

Le funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, che determinano la superficie trasformata, debbono soddisfare a cinque equazioni, equivalenti alle (7), (8). Quindi è chiaro che una di esse deve potersi scegliere ad arbitrio, ovvero che le espressioni generali delle anzidette sei quantità debbono involgere una funzione arbitraria. Cosifatte espressioni generali sono state assegnate dal sig. MINDING *), che pel primo si è occupato di questo argomento, e dagli altri autori che hanno seguito le sue traccie **). Ma se coll'introduzione esplicita di una funzione arbitraria può dirsi che il problema sia risoluto analiticamente in tutta la sua generalità, non è lo stesso quando si abbia di mira la quistione geometrica. È chiaro infatti che, per determinare completamente la natura della superficie trasformata, si può prescrivere una nuova condizione, esprimibile per mezzo di un'equazione finita o differenziale fra le ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, u, v. Volendo de-

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XVIII (1838), pag. 297, 365.

**) O. BONNET, Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 1; BOUR, ibid., t. XXII, cahier 39 (1862), pag. 1.

terminare la funzione arbitraria del sig. MINDING per mezzo di questa equazione, si incontrerebbero il più delle volte difficoltà analitiche assai più gravi di quelle che si devono superare trattando direttamente le sei equazioni fra le quantità anzidette.

Noi ci proponiamo di mostrare l'applicazione di questo secondo metodo ad alcuni casi scelti fra i più interessanti, colla speranza che la semplicità dei calcoli e dei risultati possa invogliare altri a proseguire in queste ricerche, le quali sembrano promettere una messe abbondante di nuovi ed eleganti teoremi.

§ 2.

Se, ritenute soddisfatte le prime due condizioni (7), si suppone che la curvatura geodetica della primitiva direttrice sia nulla, risulta manifestamente dalla (12) essere necessario e sufficiente che sia nulla la curvatura geodetica della direttrice trasformata: vale a dire che, se la direttrice della 1ª superficie è una linea geodetica, è necessario e sufficiente che sia geodetica anche quella della seconda, posto che sieno soddisfatte le altre due condizioni. Ciò premesso vediamo se la direttrice trasformata possa essere una retta. Assumendo questa retta per asse delle z e contando le sue lunghezze u dall'origine, si avrebbe

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = u, \qquad \frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = 0.$$

Per soddisfare alla seconda delle condizioni (7) basta evidentemente supporre uguale a θ l'angolo che la generatrice della superficie trasformata fa coll'asse delle z: noi porremo dunque

$$(14) \qquad l_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad n_1 = \cos\theta,$$

da cui

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

e le due rimanenti condizioni si ridurranno così alle seguenti:

$$\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2\theta = \varepsilon'^2, \qquad \frac{\cos\omega}{\rho} = 0.$$

Se dunque si ammette che la direttrice primitiva sia una linea geodetica della superficie data, la seconda di queste equazioni sarà identicamente soddisfatta, e la prima lo sarà egualmente determinando φ colla formola

$$(15) \qquad \varphi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta}\, du,$$

dopo di che le (14) daranno i valori di l_1, m_1, n_1. Dunque:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata, per via di semplice flessione, in modo che una sua linea geodetica diventi una linea retta; e questa trasformazione dipende da una sola quadratura.

Consideriamo per esempio l'iperboloide di rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

per il quale, assumendo come linea direttrice la circonferenza di gola, che è una sua linea geodetica, si può porre

$$\xi = a \cos \frac{u}{a}, \qquad \eta = a \operatorname{sen} \frac{u}{a}, \qquad \zeta = 0,$$

$$l = - \cos \theta \operatorname{sen} \frac{u}{a}, \qquad m = \cos \theta \cos \frac{u}{a}, \qquad n = \operatorname{sen} \theta, \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}.$$

La formola (15) dà in questo caso

$$\varphi = \frac{u \operatorname{cotg} \theta}{a} = \frac{u}{b},$$

e quindi

$$l_1 = \operatorname{sen} \theta \cos \frac{u}{b}, \qquad m_1 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{u}{b}, \qquad n_1 = \cos \theta.$$

Le coordinate della superficie trasformata, che è un elicoide a direttrice rettilinea, sono dunque

$$x = \frac{bv}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{u}{b}, \qquad y = \frac{bv}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \frac{u}{b}, \qquad z = u + \frac{av}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

da cui eliminando u, v si deduce

$$z = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + y^2} + b \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

equazione di una superficie applicabile sull'iperboloide di rotazione i cui semiassi sono a e b.

È bene osservare che quando la direttrice è una linea geodetica, si ha dalla (11) $\varkappa = - \theta' \operatorname{sen} \theta$, e quindi, (13),

$$\delta w = \frac{\operatorname{sen} \theta \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\varepsilon'} \delta u.$$

Ne risulta, (15), che se la superficie primitiva è sviluppabile, si ha $\varphi = \text{cost.}$ e quindi

la superficie trasformata è un piano. Questo fatto è una conseguenza necessaria dell'ipotesi da noi ammessa che nella trasformazione le generatrici si mantengano rettilinee.

Sono degne d'essere notate le seguenti due applicazioni del teorema generale dimostrato al principio di questo §.

1° Ogni superficie gobba sulla quale esiste una linea geodetica normale a tutte le generatrici si può, come è manifesto, considerare come generata dalle rette perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura. Ora quando questa linea geodetica viene trasformata in una linea retta, le generatrici della superficie si dispongono tutte normalmente a questa retta. Si può dunque dire che:

Ogni superficie gobba generata dalle perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura è applicabile sopra una superficie conoidale *).

Le formole relative a questa trasformazione sono semplicissime. Infatti se l, m, n sono i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla normale al piano osculatore di una linea a doppia curvatura di cui u è l'arco, r il raggio di torsione, si ha

$$\varepsilon' = \frac{1}{r},$$

e quindi

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = u, \qquad \varphi = \int \frac{du}{r},$$

$$l_1 = \cos\varphi, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi, \qquad n_1 = 0.$$

2° In virtù del teorema generale dimostrato in questo § si vede che il numero delle superficie rigate *rettificanti* di una linea qualsivoglia, piana od a doppia curvatura, è *illimitato*. È chiaro infatti che se da ogni punto di questa linea si conduce una retta perpendicolare alla normale principale ed inclinata sulla tangente di un angolo variabile con legge qualunque, si genera una superficie rigata della quale la linea data è linea geodetica: si può dunque sempre trasformare questa superficie in modo che la linea si converta in una retta.

Chiamiamo $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ a_3, b_3, c_3$ i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla tangente, dalla normale principale e dalla perpendicolare al piano osculatore della linea data, con ρ, r i raggi di 1ª e 2ª curvatura. Indicando con l, m, n i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla generatrice di una delle superficie rigate rettificanti, si può porre

$$l = a_1\cos\theta + a_3\operatorname{sen}\theta, \qquad m = b_1\cos\theta + b_3\operatorname{sen}\theta, \qquad n = c_1\cos\theta + c_3\operatorname{sen}\theta,$$

---

*) ENNEPER, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang IX (1864), pag. 398.

da cui, per le note formole del sig. SERRET *), si deduce

$$l' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) a_2 - \theta'(a_1 \operatorname{sen}\theta - a_3 \cos\theta),$$

$$m' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) b_2 - \theta'(b_1 \operatorname{sen}\theta - b_3 \cos\theta),$$

$$n' = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) c_2 - \theta'(c_1 \operatorname{sen}\theta - c_3 \cos\theta),$$

e quindi

$$\varepsilon'^2 = \left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right)^2 + \theta'^2. \tag{16}$$

Per questo valore la (15) diventa

$$\varphi = \int \left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\rho} + \frac{1}{r}\right) du.$$

Quando si determina θ coll'equazione

$$\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\rho} + \frac{1}{r} = 0,$$

la superficie trasformata è un piano, e si ottiene così la *sviluppabile rettificante*, che è la sola superficie rettificante alla quale i geometri abbiano fin qui rivolta la loro attenzione. Infatti il noto valore di θ relativo alle generatrici di questa superficie coincide col precedente.

L'equazione (16) rientra in una formola più generale che verrà stabilita altrove.

§ 3.

Il teorema dimostrato nel § precedente può rendersi intuitivo col mezzo di considerazioni geometriche semplicissime, le quali conducono altresì alla conoscenza di una proprietà più generale.

Infatti ogni superficie rigata si può considerare come formata da infinite striscie, ciascuna compresa fra due generatrici rettilinee contigue. Si immagini una linea qualunque tracciata su questa superficie. Il piano tangente alla superficie in un punto di questa linea è determinato dalla direzione della generatrice passante per quel punto, e dalla direzione dell'elemento di curva terminato al punto stesso. Ora è chiaro che si

*) Veggasi BERTRAND, *Traité de calcul différentiel*, §§ 590, 591.

può far girare la striscia contenente il successivo elemento intorno alla generatrice contenente il punto comune a questo ed al primo elemento, finchè l'altro termine del secondo elemento, e quindi tutto l'elemento stesso, venga a giacere nel piano tangente che contiene il primo elemento. Nello stesso modo si può far girare la terza striscia finchè l'elemento in essa contenuto si disponga nel piano determinato dall'elemento precedente e dalla generatrice comune alla seconda ed alla terza striscia; e così di seguito. In tal guisa la primitiva superficie rigata viene a trasformarsi in un'altra sulla quale la curva trasformata si trova tracciata in modo che ciascuna coppia di elementi consecutivi esiste nel piano tangente la superficie stessa. Vale a dire la curva trasformata ha tutti i suoi piani osculatori tangenti la superficie trasformata, e però è una linea *asintotica* di questa superficie. Dunque:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una linea qualunque tracciata sovr'essa diventi una linea asintotica della superficie trasformata.

Quando la linea primitiva è geodetica, comunque si infletta la superficie sulla quale è tracciata, essa deve sempre continuare ad essere una geodetica della superficie trasformata, e quindi i suoi piani osculatori debbono sempre mantenersi normali alla superficie stessa. Essa dunque non può diventare una linea asintotica senza trasformarsi in una retta, giacchè in ogni altro caso è impossibile che i suoi piani osculatori sieno al tempo stesso normali e tangenti alla superficie trasformata. Così si ricade sul teorema del § precedente.

Se la linea che si considera è una trajettoria ortogonale delle generatrici, è chiaro che quando essa è stata trasformata in linea asintotica, le sue normali principali sono dirette secondo le generatrici della superficie trasformata. Di qui si conclude che *si può sempre, con una flessione opportuna, rendere tutte le generatrici di una superficie rigata normali principali di una qualunque delle loro trajettorie ortogonali* *).

È facile trovare le formole relative alla trasformazione in discorso.

Infatti la (12) dà primieramente

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\omega}{\rho},$$

poichè $\omega_1 = 0$ per le linee asintotiche. Di qui è confermata l'osservazione che se la prima direttrice è geodetica, la trasformata è una retta. L'equazione precedente può scriversi, in virtù della (11),

$$\rho_1 = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varkappa + \theta' \operatorname{sen}\theta}. \tag{17}$$

*) Bour, Journal de l'École Polytechnique, t. XXII, cahier 39 (1862), pag. 52.

...uo la curva che si considera è la linea di stringimento, si ha $\varkappa = 0$, epperò

$$\rho_1 = -\frac{1}{\theta'} = -\frac{du}{d\theta},$$

ovvero, chiamando $d\eta$ l'angolo di contingenza della linea trasformata,

$$d\eta + d\theta = 0,$$

formola da cui si deduce un teorema noto *).

Chiamiamo ora $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i coseni degli angoli fatti coi tre assi dalla tangente, dalla normale principale e dalla perpendicolare al piano osculatore della direttrice trasformata. Osservando che la generatrice della superficie trasformata è nel piano osculatore di questa curva e fa l'angolo θ colla tangente ad essa, si vede essere

$$(18)\quad l_1 = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta, \quad m_1 = \beta_1 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta, \quad n_1 = \gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta,$$

da cui, ricordando le già citate relazioni del sig. SERRET, si deduce

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r_1^2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \theta'\right)^2,$$

dove r_1 è il raggio di torsione della curva trasformata. Di qui si cava [(7), (17)]

$$(19)\qquad r_1 = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}.$$

Le due equazioni (17), (19), insieme colla (3), definiscono completamente le tre funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, conosciute le quali le l_1, m_1, n_1 sono date dalle (18).

Il valore di r_1 non diventa infinito che per $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0$, cioè la curva trasformata non può essere piana che quando la superficie primitiva è sviluppabile, lo che è anche chiaro per sè. Bisogna però eccettuare il caso in cui la direttrice coincide collo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, giacchè allora si ha $\theta = 0$, $\varkappa = 0$ e la formola precedente diventa indeterminata, come dev'essere: infatti comunque si pieghi una superficie sviluppabile, purchè le sue primitive generatrici si mantengano rettilinee, è chiaro che il suo spigolo di regresso conserva sempre la proprietà caratteristica delle linee asintotiche, e, mentre la sua curvatura di prima specie si mantiene invariata in ciascun punto, la torsione può ricevere valori variabili con legge arbitraria.

*) PAUL SERRET, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, Paris, 1860, pag. 150.

Quando la direttrice coincide colla linea di stringimento della superficie (supposta non sviluppabile), si ha dalla (19) la formola semplicissima

$$r_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\varepsilon'},$$

che per $\theta = 90^\circ$ coincide con una che abbiamo già incontrata nella penultima applicazione del § 2.

La direttrice trasformata risulta definita, nella presente trasformazione, dalle espressioni dei due raggi di 1^a e 2^a curvatura in funzione dell'arco: il problema di determinare una curva con queste condizioni è stato recentemente trattato dal sig. HOPPE *). Del resto è chiaro che l'integrazione completa delle tre equazioni (17), (19), (3), che sono del 2°, 3° e 1° ordine, deve introdurre sei costanti arbitrarie, che si possono determinare fissando la posizione assoluta della nuova direttrice nello spazio. Tutte le superficie trasformate in questo modo non possono dunque differire fra loro che per la posizione, come emerge anche dalle precedenti considerazioni geometriche.

§ 4.

Ponendo per brevità

$$A = mn' - m'n, \qquad B = nl' - n'l, \qquad C = lm' - l'm,$$

dalle tre equazioni

$$l\xi' + m\eta' + n\zeta' = \cos\theta,$$
$$l'\xi' + m'\eta' + n'\zeta' = \varkappa,$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$

si deducono i valori seguenti:

$$(20)\quad \begin{cases} \xi' = l\cos\theta + \dfrac{\varkappa l' \pm A\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \\[2ex] \eta' = m\cos\theta + \dfrac{\varkappa m' \pm B\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \\[2ex] \zeta' = n\cos\theta + \dfrac{\varkappa n' \pm C\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\varepsilon'^2}, \end{cases}$$

formole nelle quali il radicale deve esser preso collo stesso segno in tutte tre.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LX (1862), pag. 182; Bd. LXIII (1864), pag. 122.

Se escludiamo il caso delle superficie sviluppabili, i due sistemi di valori delle ξ', η', ζ' sono sempre essenzialmente differenti, poichè la quantità $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}$ non può èsser nulla indipendentemente da u. Quindi è chiaro che uno solo di questi sistemi coinciderà con quello dei valori già precedentemente noti delle derivate ξ', η', ζ': in altri termini, affinchè la sostituzione dei valori dati di ξ, η, ζ, l, m, n renda identiche le tre formole precedenti, bisognerà dare al radicale un segno determinato.

Ciò posto osserviamo che se si ponesse

$$l_1 = l, \qquad m_1 = m, \qquad n_1 = n, \tag{21}$$

le cinque equazioni (7), (8) si ridurrebbero alle sole tre seguenti:

$$l\xi_1' + m\eta_1' + n\zeta_1' = \cos\theta,$$

$$l'\xi_1' + m'\eta_1' + n'\zeta_1' = \varkappa,$$

$$\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1,$$

le quali non differiscono che per la sostituzione di ξ_1', η_1', ζ_1' a ξ', η', ζ' da quelle che ci hanno forniti i valori (20) e che devono dare quindi per le prime tre quantità valori identici ai suddetti. Se dunque si prende in queste formole il radicale col segno opposto a quello che rende i loro secondi membri identicamente eguali a ξ', η', ζ', si hanno i valori di ξ_1', η_1', ζ_1', corrispondenti ad una superficie gobba distinta dalla data, il cui elemento lineare è identico a quello della prima e le cui generatrici sono parallele alle corrispondenti generatrici della stessa. Dunque:

È sempre possibile trasformare una superficie gobba in modo che ciascuna generatrice della trasformata sia parallela alla corrispondente generatrice della primitiva.

Facciamo alcune applicazioni di questo teorema.

1° Consideriamo dapprima una superficie dotata di una direttrice rettilinea e poniamo

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = u,$$

$$l = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \qquad m = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad n = \cos\theta,$$

donde

$$\varepsilon' = \sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2\operatorname{sen}^2\theta}, \qquad \varkappa = -\theta'\operatorname{sen}\theta, \qquad \sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = \varphi'\operatorname{sen}^2\theta.$$

Sostituendo questi valori nelle formole (20), e prendendo il segno conveniente, si trova

$$\xi'_1 = \frac{\varphi' \operatorname{sen}^2 \theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 \theta} (\varphi' \operatorname{sen} 2\theta \cos\varphi + 2\theta' \operatorname{sen}\varphi),$$

$$\eta'_1 = \frac{\varphi' \operatorname{sen}^2 \theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 \theta} (\varphi' \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\varphi - 2\theta' \cos\varphi),$$

$$\zeta'_1 = \frac{\theta'^2 + \varphi'^2 \cos 2\theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\theta'^2 + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 \theta},$$

le quali formole, quando θ è costante, si risolvono nelle semplicissime

$$\xi_1 = \operatorname{sen} 2\theta \int \cos\varphi\, du, \qquad \eta_1 = \operatorname{sen} 2\theta \int \operatorname{sen}\varphi\, du, \qquad \zeta_1 = u \cos 2\theta.$$

2° Supponiamo che la superficie primitiva sia costituita dalle normali principali di una linea a doppia curvatura, e quindi poniamo

$$l = a_2, \qquad m = b_2, \qquad n = c_2,$$

da cui si deduce

$$l' = -\left(\frac{a_1}{\rho} + \frac{a_3}{r}\right), \quad m' = -\left(\frac{b_1}{\rho} + \frac{b_3}{r}\right), \quad n' = -\left(\frac{c_1}{\rho} + \frac{c_3}{r}\right).$$

Si troverà

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon'^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}, \quad \varkappa = -\frac{1}{\rho}, \quad \sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2} = \frac{1}{r},$$

$$A = \frac{a_3}{\rho} - \frac{a_1}{r}, \quad B = \frac{b_3}{\rho} - \frac{b_1}{r}, \quad C = \frac{c_3}{\rho} - \frac{c_1}{r}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole (20), prendendo i segni opportuni, e ponendo

$$\frac{\rho}{r} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta,$$

si trovano le formole seguenti:

$$\xi'_1 = a_1 \cos\Theta + a_3 \operatorname{sen}\Theta, \quad \eta'_1 = b_1 \cos\Theta + b_3 \operatorname{sen}\Theta, \quad \zeta'_1 = c_1 \cos\Theta + c_3 \operatorname{sen}\Theta,$$

dalle quali, nei casi particolari, si deducono coll'integrazione le coordinate della direttrice trasformata.

Da esse si ricava la relazione

$$\xi'_1 a_1 + \eta'_1 b_1 + \zeta'_1 c_1 = \cos\Theta,$$

la quale ci insegna che l'angolo delle tangenti alle due direttrici nei punti corrispondenti è uguale a Θ.

Derivando le stesse formole si trova

$$\xi_1'' = \frac{a_2}{\rho} + (a_3 \cos \Theta - a_1 \operatorname{sen} \Theta)\,\Theta',$$

$$\eta_1'' = \frac{b_2}{\rho} + (b_3 \cos \Theta - b_1 \operatorname{sen} \Theta)\,\Theta',$$

$$\zeta_1'' = \frac{c_2}{\rho} + (c_3 \cos \Theta - c_1 \operatorname{sen} \Theta)\,\Theta',$$

da cui si trae

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho^2} + \Theta'^2;$$

inoltre

$$\xi_1'' a_2 + \eta_1'' b_2 + \zeta_1'' c_2 = \frac{1}{\rho},$$

e quindi, chiamando ψ l'angolo che la normale principale della direttrice trasformata fa con quella della primitiva,

$$\cos\psi = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 \Theta'^2}}.$$

Affinchè le normali principali delle due curve fossero parallele (e quindi anche le normali principali della trasformata coincidessero colle generatrici della seconda superficie), bisognerebbe che si avesse $\cos\psi = 1$, e quindi $\rho_1 = \rho$, $\Theta = \text{cost.}$, $\frac{\rho}{r} = \text{cost.}$ Quest'ultima equazione non appartiene, come è noto, che alle eliche cilindriche. Si riconosce agevolmente che in questo caso particolare la direttrice trasformata è un'elica tracciata sul medesimo cilindro, eguale e simmetrica alla prima rispetto ad un piano normale alle generatrici del cilindro stesso. Due punti corrispondenti si trovano sulla medesima generatrice.

3° La superficie abbia la linea di stringimento ortogonale alle generatrici, cioè sia costituita dalle perpendicolari ai piani osculatori di una linea a doppia curvatura. In questo caso si ha

$$\cos\theta = 0, \qquad \varkappa = 0, \qquad l = a_3, \qquad m = b_3, \qquad n = c_3,$$

da cui

$$\varepsilon' = \frac{1}{r}, \quad A = -\frac{a_1}{r}, \quad B = -\frac{b_1}{r}, \quad C = -\frac{c_1}{r},$$

e quindi

$$\xi_1' = -a_1, \qquad \eta_1' = -b_1, \qquad \zeta_1' = -c_1.$$

Integrando si ottiene

$$\xi_1 = x_0 - \xi, \qquad \eta_1 = y_0 - \eta, \qquad \zeta_1 = z_0 - \zeta,$$

donde si vede che la direttrice trasformata è semplicemente simmetrica della primitiva rispetto al punto che ha per coordinate $\frac{1}{2}x_0$, $\frac{1}{2}y_0$, $\frac{1}{2}z_0$, vale a dire che questo punto (arbitrario) divide per metà tutte le rette che congiungono due punti corrispondenti delle due direttrici.

Troveremo nel § 6 un altro esempio di parallelismo delle generatrici corrispondenti in due superficie trasformata l'una dall'altra.

§ 5.

Considereremo ora il caso che la direttrice debba trasformarsi in una curva piana. Assumendo il piano della curva trasformata per piano delle xy, si avrà $\zeta_1 = 0$, e le equazioni della trasformazione saranno le seguenti:

$$(22) \quad \begin{cases} l_1\xi_1' + m_1\eta_1' = \cos\theta, \quad l_1'\xi_1' + m_1'\eta_1' = \varkappa, \quad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 = 1, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon'^2, \end{cases}$$

il cui numero è eguale a quello delle funzioni da determinare.

Incominciamo coll'escludere il caso in cui si abbia simultaneamente

$$\cos\theta = 0, \qquad \varkappa = 0,$$

cioè in cui la linea di stringimento sia una trajettoria ortogonale delle generatrici, caso già considerato più volte. In questa ipotesi le prime due equazioni (22) si possono scrivere

$$l_1\xi_1' + m_1\eta_1' = 0, \qquad l_1\xi_1'' + m_1\eta_1'' = 0,$$

e per soddisfarle bisogna supporre

$$l_1 = m_1 = 0, \qquad n_1 = 1,$$

ovvero

$$\xi_1'\eta_1'' - \xi_1''\eta_1' = 0.$$

La prima soluzione non è ammissibile che quando $\varepsilon' = 0$, il che richiede che la superficie data sia cilindrica: in questo caso la trasformazione resta indeterminata, come è evidente anche *a priori*. Nel secondo caso si avrebbe $\frac{1}{\rho_1} = 0$, e quindi la direttrice trasformata sarebbe una linea retta, cioè si ricadrebbe sul teorema del sig. Enneper, già dimostrato nel § 2.

Escludendo dunque questi due casi, le due prime equazioni (22) dànno

$$(l_1 m_1' - l_1' m_1)\xi_1' = m_1'\cos\theta - m_1\varkappa,$$

$$(l_1 m_1' - l_1' m_1)\eta_1' = l_1\varkappa - l_1'\cos\theta,$$

da cui, quadrando e sommando, si deduce

$$(l_1 m_1' - l_1' m_1)^2 = (\varepsilon'^2 - n_1'^2)\cos^2\theta + (1 - n_1^2)\varkappa^2 + 2\varkappa n_1 n_1' \cos\theta .$$

Ma

$$(l_1 m_1' - l_1' m_1)^2 = (l_1^2 + m_1^2)(l_1'^2 + m_1'^2) - (l_1 l_1' + m_1 m_1')^2 = \varepsilon'^2(1 - n_1^2) - n_1'^2,$$

dunque sostituendo

$$(\varepsilon'^2 - n_1'^2)\,\text{sen}^2\theta = \varkappa^2 + (\varepsilon'^2 - \varkappa^2)\,n_1^2 + 2\varkappa n_1 n_1' \cos\theta ,$$

da cui

$$n_1'\,\text{sen}^2\theta + \varkappa n_1 \cos\theta = \sqrt{\text{sen}^2\theta - n_1^2}\,\sqrt{\varepsilon'^2\,\text{sen}^2\theta - \varkappa^2}. \tag{23}$$

Quest'equazione differenziale serve a determinare n_1; conosciuta questa quantità, le l_1, m_1, ξ_1, η_1 sono date da semplici quadrature. Infatti, se si pone

$$l_1 = \text{sen}\,\varphi \cos\psi, \qquad m_1 = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi, \qquad n_1 = \cos\varphi, \tag{24}$$

si ha

$$\varepsilon'^2 = \varphi'^2 + \psi'^2\,\text{sen}^2\varphi,$$

e quindi

$$\psi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \varphi'^2}}{\text{sen}\,\varphi}\,du, \tag{25}$$

equazione che fa conoscere ψ e quindi l_1, m_1. I precedenti valori di ξ_1', η_1' assumono poi la forma

$$\xi_1' = \frac{m_1'\cos\theta - \varkappa m_1}{\psi'\,\text{sen}^2\varphi}, \qquad \eta_1' = -\frac{l_1'\cos\theta - \varkappa l_1}{\psi'\,\text{sen}^2\varphi}, \tag{26}$$

e forniscono coll'integrazione le coordinate della direttrice trasformata.

Siccome tutte le operazioni necessarie per la risoluzione del presente problema non implicano veruna impossibilità, così possiamo in generale enunciare il teorema:

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una sua linea qualsivoglia diventi piana.

Consideriamo alcuni casi particolari.

1° La direttrice sia una trajettoria ortogonale delle generatrici.

Avendosi $\theta = \frac{\pi}{2}$, la (23) diventa

$$n_1' = \sqrt{1 - n_1^2}\,\sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2},$$

da cui, confrontando colle (24), (25), si trae

$$\varphi = -\int \sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2}\,du, \qquad \psi = \int \frac{\varkappa\,du}{\text{sen}\,\varphi}.$$

Sostituendo nelle (26) i valori di l_1, m_1, ψ' si ha

$$\xi_1' = -\operatorname{sen}\psi\,, \qquad \eta_1' = \cos\psi\,,$$

da cui

$$\xi_1'' = -\cos\psi.\psi', \qquad \eta_1'' = -\operatorname{sen}\psi.\psi',$$

e quindi

$$\rho_1 = \pm\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varkappa}\,,$$

espressione che avrebbe potuto dedursi dalle (11), (12), le quali, per $\theta = \frac{\pi}{2}$, dànno

$$\frac{\cos\omega_1}{\rho_1} = -\varkappa\,,$$

osservando che φ è manifestamente il complemento dell'angolo che il piano tangente della superficie trasformata fa col piano della nuova direttrice, cioè $\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega_1$.

Se supponiamo che la superficie sia costituita dalle normali principali di una linea a doppia curvatura, e quindi che si abbia

$$l = a_2\,, \qquad m = b_2\,, \qquad n = c_2\,, \qquad \varepsilon'^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\,, \qquad \varkappa = -\frac{1}{\rho}\,,$$

troviamo

$$\varphi = -\int\frac{du}{r}\,, \qquad \psi = -\int\frac{du}{\rho\operatorname{sen}\varphi}\,,$$

da cui

$$\xi_1 = -\int\operatorname{sen}\psi\,du\,, \qquad \eta_1 = \int\cos\psi\,du\,, \qquad \rho_1 = \rho\operatorname{sen}\varphi\,,$$

$$l_1 = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,, \qquad n_1 = \cos\varphi\,.$$

In questo caso si vede che ψ coincide, in valore assoluto, col complesso degli angoli di torsione della linea considerata.

Delle quattro costanti arbitrarie che entrano in queste formole tre corrispondono ad un semplice spostamento della direttrice trasformata nel piano xy, ma la quarta somministra, in generale, trasformazioni realmente distinte fra loro.

2°) La direttrice sia una linea geodetica.

Avendosi in tal caso, dalla (11), $\varkappa = -\theta'\operatorname{sen}\theta$, l'equazione (23) diventa

$$n_1'\operatorname{sen}\theta - n_1\cos\theta.\theta' = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - n_1^2}\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}\,.$$

Quest'equazione ha per integrale generale

$$n_1 = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left[\int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta} du\right],$$

e possiede inoltre un integrale singolare, che è

$$n_1 = \operatorname{sen}\theta .$$

Una considerazione semplicissima mostra che la soluzione del nostro problema è contenuta in questo integrale singolare. Infatti quando una linea geodetica si trasforma in linea piana, essa continua ad essere linea geodetica della superficie trasformata, e quindi le rette normali a questa superficie nei punti di essa debbono trovarsi nel suo piano ed essere normali alla curva stessa. Per conseguenza le generatrici della superficie trasformata debbono projettarsi sul piano della nuova direttrice tangenzialmente alla direttrice stessa, epperò debbono fare l'angolo θ col piano xy sul quale essa è tracciata. Dunque dev'essere $n_1 = \operatorname{sen}\theta$, appunto com'è espresso dall'integrale singolare.

Questo ragionamento cessa d'essere esatto solamente quando la direttrice si trasforma in una linea retta. A questo caso, già trattato nel § 2, corrisponde appunto l'integrale generale, del quale perciò non ci occuperemo.

Poichè dunque si ha $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, dalla (25) si trae

$$\psi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta} du,$$

quindi

$$l_1 = \cos\theta\cos\psi, \qquad m_1 = \cos\theta \operatorname{sen}\psi, \qquad n_1 = \operatorname{sen}\theta;$$

poscia dalle (26) si deduce

$$\xi_1 = \int \cos\psi\, du, \qquad \eta_1 = \int \operatorname{sen}\psi\, du .$$

Si ha poi

$$\xi_1'' = -\operatorname{sen}\psi.\psi', \qquad \eta_1'' = \cos\psi.\psi',$$

da cui

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta} .$$

Così sono determinati tutti gli elementi della superficie trasformata.

Rammentiamo, a scanso d'equivoci, che la presente trasformazione non può essere applicata al caso in cui la geodetica incontri tutte le generatrici ortogonalmente, o, per meglio dire, che in questo caso la trasformata piana non può essere altro che una linea retta.

Osserveremo anche che la trasformazione considerata in questo § poteva, nel caso

della linea geodetica, essere trattata più direttamente deducendo dalle equazioni

$$l_1 \xi_1' + m_1 \eta_1' = \cos\theta ,$$

$$l_1 \xi_1'' + m_1 \eta_1'' = 0 ,$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 ,$$

i valori di l_1, m_1, n_1 e sostituendoli nella

$$l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon'^2,$$

nel qual modo si sarebbe ottenuta un'equazione alle derivate seconde in ξ_1, η_1 equivalente alla

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta} ,$$

ottenuta anche coll'altro metodo, e che poscia, combinata colla

$$\xi_1'^2 + \eta_1'^2 = 1 ,$$

avrebbe dati gli stessi valori trovati pocanzi. Applicheremo questo processo alla dimostrazione del teorema che forma l'oggetto del § seguente, e ce ne serviremo più tardi per istabilire una formola generale.

§ 6.

Ogni superficie rigata può sempre essere trasformata in modo che una qualunque delle sue linee geodetiche si trasformi in un'elica cilindrica.

Supponiamo infatti che il cilindro sul quale l'elica dev'essere tracciata abbia le generatrici parallele all'asse delle z, e chiamiamo μ_1 l'angolo costante formato dall'elica colle generatrici stesse. Bisognerà porre

$$\zeta_1' = \cos\mu_1 , \tag{27}$$

e quest'equazione, combinata colle cinque seguenti

$$\left\{ \begin{array}{c} l_1 \xi_1' + m_1 \eta_1' = \cos\theta - n_1 \cos\mu_1 , \quad l_1 \xi_1'' + m_1 \eta_1'' = 0 , \quad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 = \operatorname{sen}^2 \mu_1 , \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 , \quad l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 = \varepsilon'^2 , \end{array} \right. \tag{28}$$

determinerà completamente le sei quantità relative alla superficie trasformata, ciò che dimostra la possibilità della trasformazione, nella quale è evidente che il valore di μ_1 può assumersi ad arbitrio. Bisogna eccettuare il caso in cui si avesse simultaneamente

$\cos\mu_1 = 0$, $\cos\theta = 0$, caso che venne già escluso nel § precedente e del quale si è già parlato; o, più in generale, in cui s'avesse $\mu_1 = 0$, posto che θ fosse costante.

Osserviamo anzitutto che essendo in generale

$$\frac{1}{\rho_1^2} = (\eta_1'\zeta_1'' - \eta_1''\zeta_1')^2 + (\zeta_1'\xi_1'' - \zeta_1''\xi_1')^2 + (\xi_1'\eta_1'' - \xi_1''\eta_1')^2$$
$$= \xi_1''^2 + \eta_1''^2 + \zeta_1''^2,$$

si ha nel nostro caso

$$\frac{1}{\rho_1^2} = (\xi_1''^2 + \eta_1''^2)\cos^2\mu_1 + (\xi_1'\eta_1'' - \xi_1''\eta_1')^2 = \xi_1''^2 + \eta_1''^2,$$

quindi

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \xi_1''^2 + \eta_1''^2, \qquad \xi_1'\eta_1'' - \xi_1''\eta_1' = \frac{\operatorname{sen}\mu_1}{\rho_1}. \tag{29}$$

Dalla seconda di queste equazioni, dalla terza delle (28) e dalla

$$\xi_1'\xi_1'' + \eta_1'\eta_1'' = 0$$

si deducono inoltre i valori seguenti:

$$\xi_1'' = -\frac{\eta_1'}{\rho_1 \operatorname{sen}\mu_1}, \qquad \eta_1'' = \frac{\xi_1'}{\rho_1 \operatorname{sen}\mu_1}. \tag{30}$$

Ciò premesso, le due prime equazioni (28) dànno, viste le (30),

$$l_1 \operatorname{sen}^2\mu_1 = (\cos\theta - n_1\cos\mu_1)\,\xi_1',$$
$$m_1 \operatorname{sen}^2\mu_1 = (\cos\theta - n_1\cos\mu_1)\,\eta_1',$$

da cui, quadrando e sommando, si cava

$$n_1^2 - 2n_1\cos\mu_1\cos\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\mu_1 = 0,$$

e quindi

$$n_1 = \cos(\mu_1 \pm \theta), \quad \cos\theta - n_1\cos\mu_1 = \operatorname{sen}\mu_1 \operatorname{sen}(\mu_1 \pm \theta).$$

Per conseguenza, prendendo il solo segno inferiore, affine di restare in accordo colla convenzione stabilita nel § 1, si ha

$$l_1 = \frac{\xi_1' \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}{\operatorname{sen}\mu_1}, \quad m_1 = \frac{\eta_1' \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}{\operatorname{sen}\mu_1}, \quad n_1 = \cos(\mu_1 - \theta). \tag{31}$$

Sostituendo questi valori nell'ultima delle (28) si trova

$$\varepsilon'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(\mu_1 - \theta)}{\rho_1^2 \operatorname{sen}^2\mu_1} + \theta'^2,$$

da cui

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{sen} \mu_1 \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)} . \tag{32}$$

Chiamando R' il raggio di curvatura della sezione retta del cilindro su cui è tracciata l'elica, si ha, come è noto, $R' = \rho_1 \operatorname{sen}^2 \mu_1$, e quindi

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen} \mu_1 \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)} . \tag{33}$$

Sostituendo nelle (30) il valore di ρ_1 dato dalla (32) e osservando la terza delle equazioni (28), si trovano le formole

$$\frac{\xi_1''}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \mu_1 - \xi_1'^2}} = - \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)} , \qquad \frac{\eta_1''}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \mu_1 - \eta_1'^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)} ,$$

da cui, ponendo

$$\varphi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)} du , \tag{34}$$

si cava

$$\xi_1 = \operatorname{sen} \mu_1 \int \cos \varphi \, du , \quad \eta_1 = \operatorname{sen} \mu_1 \int \operatorname{sen} \varphi \, du , \quad \zeta_1 = u \cos \mu_1 , \tag{35}$$

e quindi

$$l_1 = \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta) \cos \varphi , \quad m_1 = \operatorname{sen}(\mu_1 - \theta) \operatorname{sen} \varphi , \quad n_1 = \cos(\mu_1 - \theta). \tag{36}$$

Così si hanno per mezzo di sole quadrature tutte le formole relative alla nostra quistione. Le generatrici della superficie trasformata risultano manifestamente tangenti al cilindro, come doveva essere, perchè l'elica è per ipotesi una geodetica non solo della superficie cilindrica ma anche della superficie rigata.

Faremo le due seguenti applicazioni.

1° Le formole

$$\xi = a \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a} , \qquad \eta = a \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a} , \qquad \zeta = u \cos \mu ,$$

$$l = - \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a} , \quad m = \operatorname{sen} \nu \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu}{a} , \quad n = \cos \nu ,$$

rappresentano un elicoide rigato, la cui elica di stringimento (di cui u è l'arco) è tracciata sopra un cilindro di raggio a, e fa colle generatrici di questo l'angolo μ, mentre ν è l'angolo che le generatrici dell'elicoide fanno con quelle del cilindro.

Se poniamo per brevità

$$\frac{a \operatorname{sen}(\nu + \mu_1 - \mu) \operatorname{sen} \mu_1}{\operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \mu} = a_1 ,$$

dove μ_1 è una costante arbitraria, si trova che φ può prendersi eguale ad $\frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1} + \frac{\pi}{2}$, poichè i valori della costante da aggiungersi all'integrale (34) non influiscono che sulla posizione assoluta della superficie trasformata; sostituendo questo valore di φ nelle formole (35), (36), si ha

$$\xi_1 = a_1 \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1} , \qquad \eta_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1} , \qquad \zeta_1 = u \cos \mu_1 ,$$

$$l_1 = - \operatorname{sen}(\nu + \mu_1 - \mu) \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1} , \quad m_1 = \operatorname{sen}(\nu + \mu_1 - \mu) \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu_1}{a_1} ,$$

$$n_1 = \cos(\nu + \mu_1 - \mu) ,$$

formole perfettamente analoghe a quelle che rappresentano il primo elicoide, e che mostrano essere a_1, μ_1, $\nu + \mu_1 - \mu$ quantità di egual significato delle a, μ, ν, rispetto all'elicoide trasformato.

Facendo $\mu_1 = 0$ si avrebbe l'elicoide a direttrice rettilinea, e facendo $\mu_1 = \frac{\pi}{2} + \mu - \nu$ si avrebbe l'elicoide a piano direttore. Finalmente facendo $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$ si avrebbe un iperboloide di rotazione, superficie sulla quale sono applicabili, come è noto, tutti gli elicoidi contenuti nelle precedenti equazioni. Le formole relative a questo caso sono

$$\xi_1 = \frac{a \cos(\mu - \nu)}{\operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu} \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu}{a \cos(\mu - \nu)} , \quad \eta_1 = \frac{a \cos(\mu - \nu)}{\operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu} \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu}{a \cos(\mu - \nu)} ,$$

$$\zeta_1 = 0 ,$$

$$l_1 = - \cos(\mu - \nu) \operatorname{sen} \frac{u \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu}{a \cos(\mu - \nu)} , \quad m_1 = \cos(\mu - \nu) \cos \frac{u \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \nu}{a \cos(\mu - \nu)} ,$$

$$n_1 = \operatorname{sen}(\mu - \nu) ,$$

che sostituite nelle (1) dànno, coll'eliminazione di u, v,

$$\frac{x^2 + y^2}{\cos^2(\mu - \nu)} - \frac{z^2}{\operatorname{sen}^2(\mu - \nu)} = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 \mu \operatorname{sen}^2 \nu} .$$

Il caso di eccezione, già menzionato da principio, si verifica attualmente per $\mu_1 = \mu - \nu$, come è facile riconoscere *a posteriori*. Questo valore della costante μ_1 deve pertanto ritenersi escluso.

2° Supponiamo che la direttrice della prima superficie sia l'asse delle z e poniamo quindi

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = u,$$

$$l = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \qquad m = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, \qquad n = \cos\theta.$$

In questo caso si ha dalla (34)

$$\varphi = \int \frac{\psi'\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)}\, du,$$

valore che sostituito nelle formole (35), (36) porgerà la trasformazione richies.

Se si suppone θ costante ed uguale ad $\frac{1}{2}\mu_1$, si ha semplicemente $\varphi = \psi$, e q...

$$l_1 = l, \qquad m_1 = m, \qquad n_1 = n,$$

cioè le generatrici della superficie trasformata diventano parallele a quelle della primitiva, caso particolare della quistione trattata nel § 4. Otteniamo così un teorema che può essere enunciato come segue:

Sopra un cilindro a base qualunque si tracci un'elica formante colle generatrici l'angolo arbitrario μ, e si faccia scorrere lungo quest'elica, tangenzialmente al cilindro, una retta inclinata sulle generatrici dell'angolo $\frac{1}{2}\mu$. La superficie gobba ottenuta in tal modo è sovrapponibile a quella generata da una retta che si mantiene costantemente parallela alle generatrici della superficie precedente, mentre un suo punto si muove sopra un asse parallelo alle generatrici del cilindro e percorre su quest'asse lunghezze costantemente eguali agli archi corrispondenti dell'elica.

§ 7.

Le considerazioni geometriche di cui abbiamo fatto uso nel § 3 potrebbero servire a dimostrare facilmente che si può sempre trasformare una superficie rigata in modo che le sue generatrici diventino parallele a quelle di un cono direttore dato ad arbitrio (il quale però non può mai, tranne quando la superficie è cilindrica, essere ridotto ad una semplice retta). Questa proprietà fu già stabilita dal Sig. MINDING (l. c.) e più recentemente dal Sig. BOUR *), il quale fondò su di essa un'ingegnosa classificazione delle superficie rigate. Perciò noi non ritorneremo su questo argomento e ci limiteremo ad esporre qualche considerazione relativa al caso in cui il cono assunto come direttore sia retto.

In quest'ipotesi, chiamando λ l'angolo che le generatrici del cono fanno col suo

*) Memoria citata, pag. 43.

asse, che supponiamo parallelo ad Oz, si può porre

$$l_1 = \operatorname{sen}\lambda\cos\varphi, \qquad m_1 = \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\varphi, \qquad n_1 = \cos\lambda,$$

da cui

$$\varepsilon' = \varphi'\operatorname{sen}\lambda.$$

Le equazioni che devono essere soddisfatte dalle funzioni ξ_1, η_1, ζ_1 sono quindi le seguenti:

$$(37)\qquad \begin{cases} \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 1, \\ (\xi_1'\cos\varphi + \eta_1'\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\lambda + \zeta_1'\cos\lambda = \cos\theta, \\ -(\xi_1'\operatorname{sen}\varphi - \eta_1'\cos\varphi)\,\varepsilon' = \varkappa. \end{cases}$$

La projezione sul piano xy della generatrice trasformata è rappresentata da

$$(x - \xi_1)\operatorname{sen}\varphi - (y - \eta_1)\cos\varphi = 0,$$

epperò l'inviluppo di tutte le projezioni analoghe deve soddisfare all'equazione

$$[(x - \xi_1)\cos\varphi + (y - \eta_1)\operatorname{sen}\varphi]\,\varphi' = \xi_1'\operatorname{sen}\varphi - \eta_1'\cos\varphi,$$

ossia, per le (1),

$$(38)\qquad \xi_1'\operatorname{sen}\varphi - \eta_1'\cos\varphi = v\varphi'\operatorname{sen}\lambda.$$

Questa equazione fra u e v, alla quale si perverrebbe egualmente supponendo variabile l'angolo λ, rappresenta sulla superficie trasformata, la curva secondo cui la superficie stessa è inviluppata da una superficie cilindrica avente le generatrici parallele all'asse delle z. La curva corrispondente sulla superficie primitiva è rappresentata dalla stessa equazione fra u e v, che, in virtù dell'ultima equazione (37), può scriversi, nell'ipotesi di λ costante e quindi di $\varphi'\operatorname{sen}\lambda = \varepsilon'$,

$$\varkappa + v\varepsilon'^2 = 0.$$

Sostituendo il valore di v cavato da quest'equazione nelle (1), si hanno le coordinate rettangole della curva in quistione, che sono

$$x = \xi - \frac{\varkappa l}{\varepsilon'^2}, \qquad y = \eta - \frac{\varkappa m}{\varepsilon'^2}, \qquad z = \zeta - \frac{\varkappa n}{\varepsilon'^2}.$$

Da queste si deduce

$$x' = \xi' - \frac{\varkappa l'}{\varepsilon'^2} - l\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

$$y' = \eta' - \frac{\varkappa m'}{\varepsilon'^2} - m\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

$$z' = \zeta' - \frac{\varkappa n'}{\varepsilon'^2} - n\left(\frac{\varkappa}{\varepsilon'^2}\right)',$$

e quindi

$$l'x' + m'y' + n'z' = 0,$$

risultato il quale c'insegna che la linea in discorso non è altro che la linea di stringimento. Dunque:

La linea di stringimento d'una superficie rigata avente tutte le generatrici egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso è la linea di contatto fra questa superficie e la superficie cilindrica normale al piano ed involvente la superficie data.

Reciprocamente:

Se la linea di contatto fra una superficie gobba ed una superficie cilindrica involvente è la linea di stringimento della prima superficie, le generatrici di questa sono tutte ugualmente inclinate rispetto a quelle della seconda.

Infatti se si suppone λ variabile e si considera come direttrice la stessa linea di stringimento, cioè si pone $\varkappa = 0$, si ottiene al posto della terza equazione (37) la seguente:

$$[(\xi_1' \cos\varphi + \eta_1' \operatorname{sen}\varphi)\cos\lambda - \zeta_1' \operatorname{sen}\lambda]\,\lambda' = (\xi_1' \operatorname{sen}\varphi - \eta_1' \cos\varphi)\,\varphi' \operatorname{sen}\lambda,$$

e quindi, in virtù della seconda equazione (37), che rimane invariata, e della $\zeta_1' = \cos(\lambda + \theta)$, l'equazione (38) diventa

$$\lambda' \operatorname{sen}\theta = v\,\varphi'^2 \operatorname{sen}^2\lambda .$$

Ora la linea di contatto della superficie trasformata colla superficie cilindrica deve, per ipotesi, coincidere colla direttrice, cioè colla $v = 0$, dunque $\lambda' \operatorname{sen}\theta = 0$. Se la superficie non è sviluppabile, $\operatorname{sen}\theta$ non può essere nullo, dunque bisogna che si abbia $\lambda' = 0$, cioè $\lambda = \text{cost.}$

Del resto queste proprietà si possono rendere evidenti per mezzo di facili considerazioni geometriche.

Infatti quando due rette concorrenti in un punto dello spazio sono egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso è chiaro che, projettando su questo piano la normale comune condotta ad esse dal loro punto d'intersezione si ottiene una retta che divide in due parti eguali l'angolo formato dalle projezioni delle due rette. Di qui risulta che se due rette infinitamente vicine e non situate in un medesimo piano fanno lo stesso angolo con un piano fisso, la direzione della loro minima distanza deve projettarsi su questo piano parallelamente alla bisettrice dell'angolo infinitesimo formato dalle projezioni delle due rette. Ora la lunghezza della minima distanza essendo infinitamente piccola, anche la sua projezione deve esser tale e quindi, avuto riguardo alla direzione che prende questa projezione, è chiaro che le projezioni dei piedi della minima distanza anzidetta debbono cadere sulle projezioni delle due rette, in punti infinitamente vicini all'intersezione di queste due projezioni.

Applicando quest'osservazione alle successive coppie di generatrici infinitamente vicine di una superficie gobba avente tutte le generatrici egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso, se ne conclude immediatamente che « *la linea di stringimento di una tale superficie gobba si projetta su questo piano secondo l'inviluppo delle projezioni delle generatrici* ».

Inversamente, se due generatrici contigue *non* fanno lo stesso angolo con un piano fisso, la direzione della minima distanza projettata su questo piano forma un angolo finito colle projezioni delle generatrici. Dunque affinchè la projezione della minima distanza sia infinitamente piccola dello stess'ordine dell'angolo compreso dalle due generatrici e quindi anche dalle loro projezioni, bisogna che le projezioni dei piedi di questa minima distanza cadano ad una distanza *finita* dall'intersezione delle due projezioni, donde risulta evidentemente che la projezione della linea di stringimento *non* può coincidere coll'inviluppo delle projezioni delle generatrici. Dunque insieme col teorema precedente sussiste il teorema inverso, e quindi anche il reciproco.

Le considerazioni precedenti rendono intuitive alcune proprietà notate dal signor BONNET *), le quali del resto sono una conseguenza immediata della formola (11). Se le generatrici di una superficie gobba sono tutte egualmente inclinate rispetto ad un piano fisso, esse fanno pure un angolo costante colle generatrici della superficie cilindrica normale a questo piano ed involvente la superficie gobba lungo la sua linea di stringimento. Dunque se questa linea facesse un angolo costante colle generatrici della superficie gobba, farebbe del pari un angolo costante con quelle della superficie cilindrica, ossia sarebbe un'elica cilindrica, epperò una linea geodetica tanto della superficie cilindrica quanto della superficie gobba tangente. Reciprocamente se la linea di stringimento fosse una geodetica della superficie gobba, essa sarebbe tale anche rispetto alla superficie cilindrica e quindi farebbe un angolo costante tanto colle generatrici di questa quanto con quelle della superficie gobba. Ora ogni superficie gobba può trasformarsi in un'altra avente tutte le generatrici egualmente inclinate sopra un piano fisso, e le proprietà caratteristiche delle linee geodetiche e della linea di stringimento si mantengono inalterate nella trasformazione; è dunque chiaro che le osservazioni precedenti conducono a questo teorema:

Se la linea di stringimento d'una superficie gobba incontra tutte le generatrici sotto

---

*) Journal de l'École Polytechnique, t. XIX, cahier 32 (1848), pag. 71. Un teorema molto più generale è stato dato dal sig. BRIOSCHI nel Giornale dell'Istituto Lombardo e Biblioteca Italiana, t. IX (1856), pag. 400.

I teoremi del sig. BONNET sono stati dimostrati geometricamente dal sig. PAUL SERRET: vedi *Théorie nouvelle.*. pag. 149.

un angolo costante, essa è al tempo stesso linea geodetica; e, reciprocamente, *se essa è linea geodetica, essa attraversa tutte le generatrici sotto un angolo costante.*

Sussiste anche l'altra proprietà, già enunciata dal sig. BONNET (ibid.), che «*se una linea geodetica incontra tutte le generatrici sotto un angolo costante, essa è la linea di stringimento*». Infatti trasformiamo la superficie in modo che la geodetica in questione diventi una linea retta: tutte le generatrici della superficie trasformata risulteranno egualmente inclinate su questa retta e quindi, per un precedente teorema, la retta stessa sarà linea di stringimento della superficie trasformata. Dunque ecc.

§ 8.

Chiamando a, b, c i coseni degli angoli che fa coi tre assi la normale alla superficie rigata nel punto (u) della direttrice, avremo

$$(39)\qquad a = \frac{\eta' n - \zeta' m}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad b = \frac{\zeta' l - \xi' n}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad c = \frac{\xi' m - \eta' l}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Affinchè la superficie trasformata sia tangente, in tutti i punti della nuova direttrice, ad un cilindro normale al piano xy, bisognerà che si abbia

$$(40)\qquad \xi'_1 m_1 - \eta'_1 l_1 = 0,$$

e quest'equazione, combinata colle solite cinque (7) ed (8), potrà servire a determinare le sei funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1. Per questa ricerca si potrà procedere nel modo seguente.

Dalle (20) si ricava

$$\xi' m - \eta' l = \frac{1}{\varepsilon'^2}\left[-\varkappa(l m' - l' m) \pm n' \sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}\right],$$

e quindi la condizione (40) può essere surrogata dalla seguente:

$$\varkappa^2 (l_1 m'_1 - l'_1 m_1)^2 = n'^2_1 (\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2),$$

ovvero

$$n'^2_1 \operatorname{sen}^2\theta = \varkappa^2 (1 - n_1^2),$$

da cui si cava

$$(41)\qquad n_1 = \cos\varphi,$$

ponendo

$$\varphi = \int \frac{\varkappa\, du}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Quindi, ponendo di nuovo

$$(42)\qquad \psi = \int \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}\, du,$$

si hanno i valori di l_1, m_1, n_1, dalle formole

$$(43)\qquad l_1 = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,,\qquad m_1 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,,\qquad n_1 = \cos\varphi\,.$$

Se $\varkappa$ fosse uguale a 0, si avrebbe $\varphi = \text{cost.}$ e si ricadrebbe sopra un teorema dimostrato nel § precedente. Se la superficie primitiva fosse sviluppabile, si avrebbe

$$\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0\,,$$

e quindi

$$\psi = \text{cost.},$$

cioè la superficie trasformata sarebbe piana. Ma se la direttrice fosse lo stesso spigolo di regresso, si avrebbe simultaneamente $\varkappa = 0$, $\theta = 0$ e le formole di trasformazione diventerebbero indeterminate, come è manifesto *a priori*.

È chiaro che l'angolo fatto dalla direttrice trasformata colle generatrici del cilindro involvente è uguale a $\varphi + \theta$, e che l'angolo fatto dalla tangente alla sezione retta del cilindro stesso coll'asse delle x è uguale a ψ. Ne risulta che

$$(44)\quad \xi'_1 = \operatorname{sen}(\varphi+\theta)\cos\psi\,,\qquad \eta'_1 = \operatorname{sen}(\varphi+\theta)\operatorname{sen}\psi\,,\qquad \zeta'_1 = \cos(\varphi+\theta)\,,$$

valori che potrebbero dedursi dalle (20), cambiando l, m, n in l_1, m_1, n_1.

Da queste formole si deduce

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{(\varkappa + \theta'\operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{(\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2)\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}\,,$$

od anche, per la (11),

$$(45)\qquad \frac{1}{\rho_1^2} = \left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2 + \frac{(\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2)\operatorname{sen}^2(\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}\,.$$

Si determina facilmente anche la curvatura $\frac{1}{R'}$ della sezione retta del cilindro. Infatti denominando $\frac{1}{R_1}$ la curvatura della sezione normale fatta nella superficie trasformata tangenzialmente alla nuova direttrice, si ha dalla (45)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\theta).\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta}\,,$$

e quindi

$$(46)\qquad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\varphi+\theta)}\,.$$

Gli sviluppi che precedono ci permettono di enunciare il seguente teorema:

È sempre possibile trasformare una superficie rigata in modo che una sua linea qualunque diventi linea di contatto fra la superficie trasformata ed una superficie cilindrica.

Quando la direttrice è una linea geodetica, si ha $\varkappa = -\theta' \operatorname{sen}\theta$, quindi

$$\varphi = \theta_0 - \theta, \qquad \zeta_1' = \cos\theta_0,$$

donde emerge essere la nuova direttrice un'elica, come doveva essere. Si ha pure in questo caso

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_0 \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)},$$

formole che concordano colle (32), (33).

Quando la direttrice è la linea di stringimento, si trova

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \theta'^2 + \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2(\varphi + \theta)}{\operatorname{sen}^2\varphi}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\varphi + \theta)},$$

dove φ è un angolo costante.

Quando la direttrice è una trajettoria ortogonale delle generatrici, si ha

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \varkappa^2 + (\varepsilon'^2 - \varkappa^2)\operatorname{cotg}^2\varphi, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}.$$

§ 9.

Accenneremo per ultimo una condizione di natura molto generale che si può prescrivere alla trasformazione.

Ponendo per brevità

$$M = (mn' - m'n)\xi' + (nl' - n'l)\eta' + (lm' - l'm)\zeta',$$

$$N = (\eta'\zeta'' - \eta''\zeta')l + (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')m + (\xi'\eta'' - \xi''\eta')n,$$

si riconosce facilmente che l'equazione

$$M\,dv - N\,du = 0$$

definisce per ogni punto (u) della direttrice $v = 0$, la direzione $\frac{dv}{du}$ coniugata rispetto a quella direttrice stessa in quel punto; laonde se in luogo del rapporto $\frac{dv}{du}$ si sostituisce una funzione determinata di u, l'equazione risultante esprime la condizione che dev'essere soddisfatta affinchè la direttrice abbia in ciascun punto la tangente coniugata colla direzione definita dalla funzione stessa. Così per es. l'equazione $N = 0$ esprime

la condizione perchè la direttrice sia linea asintotica (ciò che segue senz'altro dal significato geometrico dell'espressione di N). Invece l'equazione $M = 0$ esprime la condizione perchè la direttrice sia linea coniugata rispetto alle generatrici rettilinee. È abbastanza chiaro per sè che quest'ultima circostanza non può verificarsi che per le superficie sviluppabili: ciò emerge del resto immediatamente dalle nostre formole, se si osserva che le (20) dànno

$$M = A\xi' + B\eta' + C\zeta' = \pm\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}\,,$$

e che, come abbiamo dichiarato nel § 1, la quantità $\sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}$ non può annullarsi che sulle superficie sviluppabili.

Affinchè la direzione $\frac{dv}{du}$ sia normale a quella della direttrice, bisogna porre

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{\cos\theta}\,,$$

epperò l'equazione

$$M + N\cos\theta = 0$$

esprime la condizione perchè la direttrice $v = 0$ sia linea di curvatura della superficie rigata. Quando la superficie non è sviluppabile si vede che la precedente condizione non può mai essere soddisfatta per $\theta = \frac{\pi}{2}$, lo che rientra nell'osservazione precedente *).

Indicando con N_1 ciò che diventa N quando si passa dalla superficie primitiva alla trasformata, è chiaro che aggiungendo alle cinque relazioni (7), (8) la

$$N_1\cos\theta \pm \sqrt{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2} = 0\,, \tag{47}$$

si potranno, in generale, determinare le sei funzioni $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; l_1, m_1, n_1$, lo che equivale a dire che « *in generale si può trasformare una superficie gobba in modo che una linea tracciata sovr'essa, e che non sia nè una generatrice nè una trajettoria ortogonale delle generatrici, diventi linea di curvatura della superficie trasformata* ».

Il valore di N_1 non contiene, oltre le quantità θ, $\varkappa$, ε', che il raggio di curvatura

*) La proprietà che « *ogni superficie rigata avente per linea di curvatura una trajettoria ortogonale delle sue generatrici è necessariamente una superficie sviluppabile* » può riguardarsi come una conseguenza dell'altra che « *le tangenti condotte dai punti di una linea a due differenti sue sviluppate formano fra loro un angolo costante* ».

ρ_1 della direttrice trasformata. Infatti dalle tre equazioni

$$l_1\xi'_1 + m_1\eta'_1 + n_1\zeta'_1 = \cos\theta\,,$$

$$l_1\xi''_1 + m_1\eta''_1 + n_1\zeta''_1 = \operatorname{sen}\theta\frac{\cos\omega}{\rho}\,,$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

si deducono i valori seguenti di l_1, m_1, n_1

$$(48)\qquad \begin{cases} l_1 = \alpha_1\cos\theta + \varpi\rho_1\alpha_2 + \alpha_3\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}\,, \\ m_1 = \beta_1\cos\theta + \varpi\rho_1\beta_2 + \beta_3\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}\,, \\ n_1 = \gamma_1\cos\theta + \varpi\rho_1\gamma_2 + \gamma_3\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}\,, \end{cases}$$

dove

$$\varpi = \operatorname{sen}\theta\frac{\cos\omega}{\rho}$$

e le quantità α, β, γ hanno i significati con cui si usarono nel § 3. Da questi valori si deduce

$$(49)\qquad N_1 = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - \varpi^2\rho_1^2}}{\rho_1}\,.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (47) si ottiene

$$(50)\qquad \frac{1}{\rho_1} = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2 + \varpi^2\cos^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\,,$$

valore sempre reale perchè $\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2$ è quantità positiva (§ 1).

Chiamando $\frac{1}{R_1}$ la curvatura normale della direttrice trasformata, si ha, pel valore di ϖ,

$$(51)\qquad \frac{1}{R_1} = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon'^2\operatorname{sen}^2\theta - \varkappa^2}}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\,,$$

valore che diventa indeterminato quando la direttrice primitiva è una trajettoria ortogonale delle generatrici di una superficie sviluppabile, come è evidente *a priori*.

Quando la direttrice è geodetica si ha $\varpi = 0$, $\varkappa = -\theta'\operatorname{sen}\theta$, e quindi

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1} = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\cos\theta}\,,$$

valore che coincide con quello trovato nel § 5, applicazione 2ª; così doveva essere

infatti, poichè, come è notissimo, una linea geodetica non può essere al tempo stesso linea di curvatura, senza essere piana.

Se la direttrice fosse la linea di stringimento, si avrebbe $\varkappa = 0$, $\varpi = -\theta' \operatorname{sen} \theta$, epperò

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon'^2 + \theta'^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta}, \qquad \frac{1}{R_1} = \pm \frac{\varepsilon'}{\cos \theta}.$$

§ 10.

Noi non vogliamo moltiplicare maggiormente questi esempi, sufficienti a mostrare l'opportunità del metodo.

Ognuno vedrà che molte delle quistioni da noi trattate sono suscettibili di generalizzazione. Così per es. il problema del § 5 è un caso particolare di quest'altro: *trasformare una superficie rigata in modo che una linea data sovr'essa si disponga sopra un'altra superficie data;* quello del § 6 rientra nel seguente: *trasformare una superficie rigata in modo che una delle sue linee geodetiche diventi linea geodetica di un'altra superficie;* e quest'ultimo è alla sua volta contenuto in quest'altro, generalizzazione di quello risoluto nel § 8: *trasformare una superficie rigata in modo che una linea data sovr'essa diventi linea di contatto fra la superficie stessa ed un'altra superficie data;* e così via. La risoluzione di queste e d'altrettali quistioni sarebbe certamente meno semplice di quella che abbiamo potuto conseguire nei casi speciali da noi trattati, ma appunto perciò meriterebbe d'essere fatta argomento d'ulteriori ricerche.

Termineremo coll'osservare che in generale non è possibile trasformare la direttrice (che è del resto una linea arbitrariamente tracciata sulla superficie) in un'altra linea di specie data, poichè ciò imporrebbe *due* condizioni alla trasformazione. Puo accadere però in certe circostanze, che questa trasformazione sia possibile, e ne abbiamo un esempio assai ovvio nella quistione trattata nel § 6. Per poter giudicare in ogni caso della possibilità di queste trasformazioni noi stabiliremo un'equazione, che deve riguardarsi come fondamentale nella teoria delle superficie rigate, poichè esprime una condizione che deve essere necessariamente soddisfatta da ogni curva trasformata indipendentemente dalla superficie in cui si trasforma la superficie primitiva.

Quest'equazione si ottiene eliminando le tre quantità l_1, m_1, n_1 fra le tre equazioni (48) e la prima delle (8).

Ponendo per un istante

$$h = \rho_1 \varpi, \qquad k = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta - \rho_1^2 \varpi^2},$$

si ottiene dalle (48), mediante le formole del sig. SERRET,

$$l'_1 = \varkappa\alpha_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\alpha_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\alpha_3,$$

$$m'_1 = \varkappa\beta_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\beta_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\beta_3,$$

$$n'_1 = \varkappa\gamma_1 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)\gamma_2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)\gamma_3,$$

da cui, quadrando e sommando,

$$\varepsilon'^2 = \varkappa^2 + \left(h' + \frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{k}{r_1}\right)^2 + \left(k' - \frac{h}{r_1}\right)^2.$$

Ponendo

$$P = h' + \frac{k}{r_1} = \left(\rho_1 \operatorname{sen}\theta \frac{\cos\omega}{\rho}\right)' + \frac{\operatorname{sen}\theta \sqrt{1 - \rho_1^2 \left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2}}{r_1},$$

quella formola può scriversi nel modo che segue *):

$$\left(P + \frac{\cos\theta}{\rho_1}\right)^2 + \frac{\left(\theta'\cos\theta - P\rho_1 \frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2}{1 - \rho_1^2\left(\frac{\cos\omega}{\rho}\right)^2} + \varkappa^2 = \varepsilon'^2, \tag{52}$$

e costituisce una relazione fra le quattro quantità

$$u, \quad \rho_1, \quad r_1, \quad \frac{d\rho_1}{du},$$

che si mantiene sempre la stessa, qualunque sia la trasformazione operata sulla superficie rigata (purchè tale da conservar rettilinee le sue generatrici primitive). In altre parole, essa è un'equazione differenziale che appartiene a tutte le curve in cui può trasformarsi la direttrice della superficie rigata.

Così per esempio, quando la direttrice è una linea geodetica, si ha

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = 0, \qquad P = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1}, \qquad \varkappa = -\theta' \operatorname{sen}\theta,$$

*) Questa trasformazione esclude solamente il caso, verificatosi nel § 3, in cui si abbia $\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\omega}{\rho}$. In tale ipotesi però s'avrebbe nella formola precedente $h = \operatorname{sen}\theta$, $k = 0$, e se ne ricaverebbe subito il valore di r_1 dato dall'equazione (19) del § 3.

e la formola precedente si riduce a quest'altra semplicissima

$$\frac{\cos\theta}{\rho_1} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1} = \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}, \tag{53}$$

che ha la stessa forma della (16) § 2, come manifestamente doveva essere. Ponendo $\frac{1}{r_1} = 0$, quest'ultima formola si riduce a quella che dà il valore di ρ_1 nella applicazione 2ª, § 5.

Se invece la direttrice fosse una trajettoria ortogonale delle generatrici, si avrebbe

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = -\varkappa, \qquad \theta' = 0, \qquad \cos\theta = 0,$$

e la (52) darebbe

$$\frac{1}{r_1} - \frac{(\rho_1\varkappa)'}{\sqrt{1-\rho_1^2\varkappa^2}} = \sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2}, \tag{54}$$

equazione dalla quale, facendo $\frac{1}{r_1} = 0$, si ricava per ρ_1 il medesimo valore ottenuto con altro metodo nell'applicazione 1ª, § 5.

Se la direttrice è la linea di stringimento, si ha

$$\varkappa = 0, \qquad \frac{\cos\omega}{\rho} = -\theta',$$

e la (52) riducesi facilmente alla seguente:

$$\frac{\cos\theta - \rho_1(\rho_1\theta'\operatorname{sen}\theta)'}{\rho_1\sqrt{1-\rho_1^2\theta'^2}} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r_1} = \varepsilon'. \tag{55}$$

Le formole precedenti possono servire a determinare una delle quantità ρ_1, r_1 quando l'altra è data, o determinata da certe condizioni.

Così nel § 4, applicazione 2ª, abbiamo trovato il valore

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2\Theta'^2}},$$

dipendentemente dalle relazioni

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varkappa = -\frac{1}{\rho}, \qquad \sqrt{\varepsilon'^2 - \varkappa^2} = \frac{1}{r}.$$

Applicando la formola (54), si trova

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{(\rho\,\Theta')'}{1+\rho^2\Theta'^2},$$

valore che si sarebbe potuto dedurre, meno prontamente, dalle formole del § citato.

La formola (32) del § 6 fornisce il valore di ρ_1 relativo ad una linea geodetica trasformata in elica cilindrica. Sostituendo nella (53) questo valore, si ha

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\cos\mu_1 \sqrt{\varepsilon'^2 - \theta'^2}}{\operatorname{sen}(\mu_1 - \theta)},$$

formola che combinata colla predetta riproduce la nota proprietà delle eliche cilindriche.

Noteremo finalmente che eliminando r_1 fra l'equazione (52) e la

$$\rho_1^2 + r_1^2 \rho_1'^2 = g^2,$$

che caratterizza le linee tracciate sopra una sfera di raggio g, si otterrebbe un'equazione differenziale del 1° ordine fra ρ_1 ed u, l'integrazione della quale farebbe conoscere la trasformata sferica della direttrice primitiva.

Pisa, Maggio 1865.

XII.

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA RELATIVO ALLA TEORIA DELLE SUPERFICIE GOBBE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VII (1865), pp. 139-150.

Le recenti ricerche del sig. Dini intorno alla quistione di sapere se, fra le superficie definite da certe relazioni particolari fra i due raggi di curvatura principali, esistano superficie gobbe, mi hanno dato occasione di trattare questo argomento col metodo adoperato nella precedente mia Memoria sulle superficie rigate.

Per tal uopo ho trovato acconcio anzi tutto di cambiare l'enunciato del problema e di concepirlo nel modo più generale possibile. La quistione che io risolvo nel presente scritto può infatti formularsi nel modo seguente:

Trovare tutte le superficie gobbe i cui raggi principali di curvatura hanno fra loro in ciascun punto una relazione costante, non data a priori.

In tutto ciò che segue intendo escluse espressamente le superficie rigate sviluppabili, siccome quelle alle quali la proposta quistione, nel suo senso proprio, non può essere applicata.

Poniamo, come nella Memoria precitata,

$$x = \xi + v\,l\,,$$

$$y = \eta + v\,m,$$

ed indichiamo, come ha fatto GAUSS, con A, B, C i tre binomj

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Rammentando che ξ, η, ζ, l, m, n sono funzioni della sola u, si trova facilmente

$$A=\eta' n-\zeta' m-v(mn'-m'n),$$

$$B=\zeta' l-\xi' n-v(nl'-n'l),$$

$$C=\xi' m-\eta' l-v(lm'-l'm).$$

Indichiamo inoltre con λ, μ, ν i coseni degli angoli che la generatrice della superficie fa rispettivamente colla tangente, colla normale e colla perpendicolare al piano osculatore della direttrice nel punto pel quale passa la generatrice medesima. Avremo le formole

$$l=\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3,$$

$$m=\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3,$$

$$n=\lambda c_1+\mu c_2+\nu c_3,$$

dalle quali, facendo uso delle formole di SERRET, e ponendo

$$(1)\qquad \lambda_1=\lambda'-\frac{\mu}{\rho}, \quad \mu_1=\mu'+\frac{\lambda}{\rho}+\frac{\nu}{r}, \quad \nu_1=\nu'-\frac{\mu}{r}$$

(cosicchè

$$(2)\qquad \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1=0),$$

si deduce, colla derivazione rispetto ad u,

$$l'=\lambda_1 a_1+\mu_1 a_2+\nu_1 a_3,$$

$$m'=\lambda_1 b_1+\mu_1 b_2+\nu_1 b_3,$$

$$n'=\lambda_1 c_1+\mu_1 c_2+\nu_1 c_3.$$

Da queste formole si trae

$$la_1+mb_1+nc_1=\cos\theta=\lambda,$$

$$l'a_1+m'b_1+n'c_1=\lambda_1=\lambda'-\frac{\mu}{\rho},$$

e quindi

$$\lambda_1=-\left(\theta'\operatorname{sen}\theta+\frac{\mu}{\rho}\right).$$

Se dunque assumiamo come direttrice la linea di stringimento, per la quale si ha,

come è noto,

$$l' a_1 + m' b_1 + n' c_1 = 0\,,$$

otteniamo per λ, μ, ν i valori seguenti:

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda = \cos\theta\,, \\ \mu = -\rho\,\theta' \operatorname{sen}\theta\,, \\ \nu = \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}\,, \end{cases}$$

che potrebbersi anche dedurre da formole date nella citata Memoria.

Per essere $\lambda_1 = 0$, la formola (2) si riduce alla

$$(4)\qquad \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0\,,$$

e per la stessa ragione si ha semplicemente

$$l' = \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3\,,$$
$$m' = \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3\,,$$
$$n' = \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3\,.$$

Da queste espressioni, ponendo di nuovo

$$(5)\qquad \lambda_2 = -\frac{\mu_1}{\rho}\,,\qquad \mu_2 = \mu_1' + \frac{\nu_1}{r}\,,\qquad \nu_2 = \nu_1' - \frac{\mu_1}{r}\,,$$

si deduce, con una seconda derivazione,

$$l'' = \lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2 + \nu_2 a_3\,,$$
$$m'' = \lambda_2 b_1 + \mu_2 b_2 + \nu_2 b_3\,,$$
$$n'' = \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 + \nu_2 c_3\,.$$

Coll'aiuto delle formole precedenti si trova facilmente

$$mn' - m'n = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,a_1 - \lambda\nu_1 a_2 + \lambda\mu_1 a_3\,,$$
$$nl' - n'l = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,b_1 - \lambda\nu_1 b_2 + \lambda\mu_1 b_3\,,$$
$$lm' - l'm = (\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,c_1 - \lambda\nu_1 c_2 + \lambda\mu_1 c_3\,;$$

$$b_1 n - c_1 m = -\nu a_2 + \mu a_3\,,$$
$$c_1 l - a_1 n = -\nu b_2 + \mu b_3\,,$$
$$a_1 m - b_1 l = -\nu c_2 + \mu c_3\,,$$

e quindi, sostituendo nei valori di A, B, C,

$$A = -v(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,a_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\,a_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\,a_3\,,$$

$$B = -v(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,b_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\,b_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\,b_3\,,$$

$$C = -v(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,c_1 - (\nu - v\lambda\nu_1)\,c_2 + (\mu - v\lambda\mu_1)\,c_3\,.$$

Si trova pure

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = v\lambda_2 a_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) a_2 + v\nu_2 a_3\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = v\lambda_2 b_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) b_2 + v\nu_2 b_3\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = v\lambda_2 c_1 + \left(v\mu_2 + \frac{1}{\rho}\right) c_2 + v\nu_2 c_3\,;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mu_1 a_2 + \nu_1 a_3\,,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = \mu_1 b_2 + \nu_1 b_3\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = \mu_1 c_2 + \nu_1 c_3\,;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0\,.$$

Da queste varie espressioni risulta che, ponendo per brevità

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= -\frac{\nu}{\rho}\,,\\ Q &= \mu\nu_2 - \mu_2\nu + \frac{\lambda\nu_1}{\rho}\,,\\ R &= \lambda(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \lambda_2(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)\,,\end{aligned}\right.$$

e usando i simboli D, D', D'' nel senso delle *Disquisitiones generales,* si ha

$$D = P + Qv - Rv^2\,,$$

$$D' = \mu\nu_1 - \mu_1\nu\,,$$

$$D'' = 0\,.$$

Rammentiamo inoltre che si ha

$$E = 1 + v^2(\mu_1^2 + \nu_1^2) = 1 + v^2 \varepsilon'^2,$$

$$F = \cos\theta,$$

$$G = 1,$$

$$EG - F^2 = \operatorname{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2,$$

ed osserviamo che, per essere, per le (3) e (4),

$$(\mu\nu_1 - \mu_1\nu)^2 = (\mu^2 + \nu^2)(\mu_1^2 + \nu_1^2) - (\mu\mu_1 + \nu\nu_1)^2 = \varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

si può scrivere

(7) $$D' = \mu\nu_1 - \mu_1\nu = \varepsilon' \operatorname{sen}\theta.$$

Per questi valori l'equazione generale in R dei raggi di curvatura *)

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\left(\frac{G}{R} - \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \left(\frac{F}{R} - \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right)^2 = 0,$$

indicando con R_1, R_2 i detti due raggi, porge le due relazioni seguenti:

$$-\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\varepsilon'^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2)^2},$$

$$-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{R v^2 - Q v - P_1}{(\operatorname{sen}^2\theta + v^2\varepsilon'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove si è posto

(8) $$P_1 = P - 2\varepsilon' \operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Eliminando v fra le due equazioni precedenti si trova

(9) $$\left\{\begin{aligned} \frac{Q\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{-R_1R_2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} &= R\left(\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{-R_1R_2} - 1\right) \\ &\quad - \frac{\varepsilon'^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[(\varepsilon' \operatorname{sen}\theta)^{\frac{3}{2}} \frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1R_2}} + P_1\right]. \end{aligned}\right.$$

Siccome quest'equazione non contiene più, insieme coi due raggi principali R_1, R_2,

---

*) Vedi Annali di Matematica pura ed applicata, t. IV (1861), pag. 284; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 37.

che la variabile u, sotto le funzioni ε', θ, etc., così il nostro problema è ora ridotto a trovare le forme che devono avere queste funzioni (e quindi le ξ, η, ζ, l, m, n), affinchè dall' equazione medesima sparisca identicamente la variabile u. Ora poichè in luogo delle due quantità R_1, R_2 è lecito introdurre due qualunque loro funzioni indipendenti, così poniamo per un momento

$$\sqrt{-R_1 R_2} = X, \qquad \frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1 R_2}} = Y,$$

e consideriamo le X, Y come variabili principali in luogo delle R_1, R_2. Ponendo di nuovo, per brevità,

$$\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta} = h, \qquad \varepsilon' \operatorname{sen}\theta = k, \qquad R + h^2 P_1 = R',$$

ed innalzando al quadrato i due membri dell' equazione (9) si trova, dopo aver diviso per $h^4 k^3$,

$$\left(\frac{Q^2}{h k^3} + \frac{2 R R'}{h^3 k^3}\right) X = \frac{R^2}{h^2 k^3} X^2 - 2 \frac{R}{h k^{\frac{3}{2}}} X Y + \left(Y + \frac{R'}{h^2 k^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + \frac{Q^2}{h^2 k^3}.$$

Notiamo bene che la quantità $h^4 k^3$, ossia $\dfrac{\varepsilon'^7}{\operatorname{sen}\theta}$, non può essere mai nè nulla nè infinita. Infatti θ si annulla soltanto sulle superficie sviluppabili, ed ε', più in particolare ancora, sulle sole superficie cilindriche, due casi che abbiamo escluso fino dal principio. Dunque le conclusioni che dedurremo dalla precedente trasformazione dell'equazione primitiva non possono andar soggette ad alcuna eccezione, finchè si tratti di superficie gobbe.

Ora siccome nell'equazione precedente si è isolato il quadrato di Y, così l'equazione stessa può risultare indipendente dalla variabile u solamente quando, per la natura delle funzioni che entrano nella composizione dei suoi coefficienti, questi stessi coefficienti risultano costanti, cioè quando, indicando con a, b, c, d quattro costanti indeterminate, si ha

$$\frac{R}{h k^{\frac{3}{2}}} = a, \qquad \frac{Q}{h k^{\frac{3}{2}}} = b, \qquad \frac{R'}{h^2 k^{\frac{3}{2}}} = c,$$

$$\frac{Q^2}{h k^3} + \frac{2 R R'}{h^3 k^3} = d.$$

Ora dall'ultima di queste relazioni, in virtù delle prime tre, si deduce

$$h = \frac{d - 2ac}{b^2},$$

dunque la quantità h, ossia $\frac{\varepsilon'}{\operatorname{sen}\theta}$, deve essere costante.

[Questa deduzione cessa d'essere rigorosa nel caso in cui b sia nullo, cioè nel caso in cui si abbia nella (9) $Q=0$. Ma, facendo uso di alcune trasformazioni che vedremo fra un momento, si trova facilmente che se h è variabile con u, si ha sempre

$$Q = h' \operatorname{sen}^2\theta .$$

Dunque, poichè θ non può essere nullo, se Q è zero dev'esser tale anche h', e quindi h dev'essere costante. Del resto da quest'ultima formola emerge che Q è appunto nullo in ogni caso: ma noi non faremo ora uso di questa conclusione, che non è per anche dimostrata].

Si ha poscia

$$\varepsilon' = h \operatorname{sen}\theta, \qquad k = h \operatorname{sen}^2\theta,$$

$$R = a h^{\frac{5}{2}} \operatorname{sen}^3\theta, \qquad Q = b h^{\frac{5}{2}} \operatorname{sen}^3\theta, \qquad R' = c h^{\frac{7}{2}} \operatorname{sen}^3\theta,$$

$$P_1 = h^{\frac{1}{2}} (ch - a) \operatorname{sen}^3\theta,$$

o più semplicemente, mutando le costanti e ricordando la (8),

$$(10) \qquad \begin{cases} Q = a \operatorname{sen}^3\theta, \qquad R = b \operatorname{sen}^3\theta, \qquad P_1 = c \operatorname{sen}^3\theta, \\ P = \operatorname{sen}^2\theta\,(c \operatorname{sen}\theta + 2b\cos\theta) . \end{cases}$$

Lo stesso valore $\varepsilon' = h \operatorname{sen}\theta$, sostituito nella (7), dà

$$\mu\nu_1 - \mu_1\nu = h \operatorname{sen}^2\theta,$$

e quest'equazione combinata colla (4), osservando che $\mu^2 + \nu^2 = \operatorname{sen}^2\theta$, porge

$$(11) \qquad \mu_1 = -h\nu, \qquad \nu_1 = h\mu .$$

Sostituendo questi valori nella (5), si trova

$$\lambda_2 = \frac{h\nu}{\rho}, \qquad \mu_2 = h\left(-\nu' + \frac{\mu}{r}\right), \qquad \nu_2 = h\left(\mu' + \frac{\nu}{r}\right) .$$

Ma dalle (1) si ha pure, per le stesse (11),

$$\mu' + \frac{\nu}{r} = -\left(h\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right), \qquad \nu' - \frac{\mu}{r} = h\mu,$$

quindi possiamo scrivere

$$(12)\qquad \lambda_2 = \frac{h\nu}{\rho}, \qquad \mu_2 = -h^2\mu, \qquad \nu_2 = -h\left(h\nu + \frac{\lambda}{\rho}\right).$$

Così abbiamo i valori di μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, espressi per le sole quantità λ, μ, ν, ρ. Da essi si deduce

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = h^2\left(h \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\lambda\nu}{\rho}\right),$$

$$\mu\nu_2 - \mu_2\nu = -h\frac{\lambda\mu}{\rho},$$

quindi, (6),

$$(13)\qquad \begin{cases} R = h^2 \operatorname{sen}\theta\left(h\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \dfrac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}\right), \\ Q = 0, \\ P = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}. \end{cases}$$

[Se h non fosse costante, i valori (11) rimarrebbero esatti egualmente, ma quelli di μ_2 e ν_2, (12), dovrebbero essere accresciuti rispettivamente di $-h'\nu$ e di $+h'\mu$, e la loro sostituzione nel valore di Q darebbe per risultato $Q = h' \operatorname{sen}^2\theta$, come si è detto pocanzi].

Di ciascuna delle quantità P, R abbiamo ora due valori: i precedenti, cioè, e quelli dati dalle (10). Eguagliandoli si trova

$$-\frac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho} = \operatorname{sen}\theta\,(c\operatorname{sen}\theta + 2h\cos\theta),$$

$$b\operatorname{sen}^2\theta = h^2\left(h\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}\right),$$

ed eliminando $\dfrac{\sqrt{1-\rho^2\theta'^2}}{\rho}$ si ottiene

$$(b + ch^2)\operatorname{sen}\theta + h^3\cos\theta = 0.$$

Ora affinchè quest'equazione fosse identica per ogni valore di θ, bisognerebbe che si avesse $h = 0$, $b = 0$. Ma h non può essere zero, perchè tale non può essere ε', dunque bisogna che θ sia costante, epperò, per un noto teorema di BONNET, che la linea di stringimento sia anche linea geodetica della superficie. Si giungerebbe allo

stesso risultato quando, volendosi supporre $\rho = \pm \frac{1}{\theta'}$, si rendesse impossibile la precedente eliminazione.

Dovendo essere costante l'angolo θ, l'una o l'altra delle due precedenti equazioni dà: $\rho =$ costante.

Avendo stabilito in tal modo che $\theta' = 0$ e che quindi $\varepsilon' =$ cost., $\rho =$ cost., è facilissimo completare la determinazione della classe di superficie gobbe della quale ci occupiamo. Si ha infatti dalle (3), (11), (12),

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \mu_1 = -h\operatorname{sen}\theta, \qquad \nu_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{\rho}, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \nu_2 = -h\left(h\operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\theta}{\rho}\right).$$

Confrontando il valore di μ_1 qui ottenuto con quello dato dalle (1), si trova

$$\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = -h\operatorname{sen}\theta, \tag{14}$$

e poichè in questa equazione θ e ρ sono costanti, è necessario che anche r sia costante: bisogna quindi, per un teorema di Puiseux, che la direttrice sia un'elica tracciata sopra un cilindro di rivoluzione, donde consegue essere la superficie un elicoide rigato avente quest'elica per linea di stringimento.

Ora daremo all'equazione (9) la sua forma finale. Si ha dalle (8), (13)

$$P_1 = -\left(\frac{1}{\rho} + 2h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta,$$

$$Q = 0,$$

$$R = h^2\left(\frac{1}{\rho} + h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta,$$

epperò l'equazione anzidetta si trasforma nella seguente:

$$\left(\frac{1}{\rho} + h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\left(h\sqrt{-R_1 R_2} - 1\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$- h^{\frac{3}{2}}\frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1 R_2}}\operatorname{sen}^3\theta + \left(\frac{1}{\rho} + 2h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta = 0,$$

ossia, dopo qualche riduzione,

$$0 = \sqrt{h}\,\frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1 R_2}}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{1}{\rho} + h\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\sqrt{-R_1 R_2} - \cos\theta .$$

Si può eliminare la costante h introducendo le sole quantità ρ, r, θ, che sono più direttamente connesse colla natura della superficie. Abbiamo infatti la formola (14) che ci permette di fare questa eliminazione, compiuta la quale si trova finalmente

$$(15)\qquad \frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1 R_2}}\sqrt{-\left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta} + \left(\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho}\right)\sqrt{-R_1 R_2} - \cos\theta = 0 .$$

Il risultato finale della nostra investigazione è contenuto, quanto alla determinazione della superficie cercata, nelle equazioni

$$\theta = \mathrm{cost.}, \qquad \mu = 0, \qquad \rho = \mathrm{cost.}, \qquad r = \mathrm{cost.},$$

le quali, riassumendo il già detto, esprimono che: *le sole superficie gobbe fra i cui raggi principali di curvatura sussiste in ogni punto una relazione costante, sono gli elicoidi.*

Reciprocamente: *tutti gli elicoidi rigati posseggono questa proprietà* *); e la relazione costante che si verifica per questi elicoidi è rappresentata dall'equazione (15).

È chiaro poi che nulla impedisce di supporre $\frac{1}{\rho} = 0$, cioè di supporre che l'elica di stringimento sia una retta. In questo caso la quantità r che, per la sua definizione, resterebbe indeterminata, deve ricevere un valore costante, che può scegliersi comunque: ciò emerge dalla formola (14).

Non faremo che due applicazioni della formola (15).

1° Meunier ha dimostrato pel primo che esiste una sola superficie rigata d'area minima, cioè soddisfacente alla relazione

$$R_1 + R_2 = 0,$$

ed è l'elicoide a piano direttore ed a direttrice rettilinea. Questo teorema è una conseguenza immediata della nostra formola: infatti, se ha luogo la precedente relazione in ogni punto della superficie, si deve avere

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} - \frac{\cos\theta}{r} = 0, \qquad \cos\theta = 0,$$

*) È anzi evidente che *in qualunque superficie elicoidale* si verifica la proprietà che *uno dei raggi di curvatura è funzione dell'altro.*

cioè

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{\rho} = 0,$$

equazioni che caratterizzano appunto l'elicoide testè menzionato.

2° Quando si suppone $\frac{1}{r} = 0$, l'elica di stringimento diventa una circonferenza e la superficie una superficie di rivoluzione. In questo caso l'equazione (15) diventa, ponendovi $\rho = -a$,

$$(R_1 + R_2)\sqrt{a \operatorname{sen}\theta \cos\theta} + (-R_1 R_2)^{\frac{3}{4}} \operatorname{sen}\theta - a(-R_1 R_2)^{\frac{1}{4}} \cos\theta = 0,$$

e si decompone in due fattori nel modo seguente:

$$[R_1^{\frac{3}{4}} \sqrt{\operatorname{sen}\theta} - (-R_2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{a\cos\theta}\,][R_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{a\cos\theta} + (-R_2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,] = 0,$$

donde emerge la sussistenza dell'una o dell'altra di queste due relazioni

$$-\frac{R_1^3}{R_2} = (a\cot\theta)^2, \qquad -\frac{R_2^3}{R_1} = (a\cot\theta)^2,$$

le quali concordano nell'esprimere la notissima proprietà delle superficie di rivoluzione del 2° ordine, d'avere uno dei raggi principali costantemente proporzionale al cubo dell'altro.

Si potrebbe, in alcuni casi, trovar preferibile di introdurre nell'equazione (15), in luogo dei raggi di 1ª e 2ª curvatura ρ ed r, il raggio a della base del cilindro sul quale è tracciata l'elica di stringimento e l'angolo ω che quest'elica fa colle generatrici del cilindro stesso. Facendo uso di relazioni note si trova facilmente che l'equazione (15) viene allora a trasformarsi nella seguente:

$$\frac{R_1 + R_2}{\sqrt[4]{-R_1 R_2}} \sqrt{a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}(\omega - \theta)} + \sqrt{-R_1 R_2} \operatorname{sen}\omega \cos(\omega - \theta) - a\cos\theta = 0.$$

Ma sotto questa forma essa non si presta più ai casi in cui $a = 0$, cioè agli elicoidi rigati a direttrice rettilinea.

Pisa, Dicembre 1865.

P. S. *Nell'intervallo di tempo che corse fra la consegna della presente Nota alla Redazione degli Annali e la sua pubblicazione, il sig.* DINI *è pervenuto dal canto suo ai medesimi risultati. Mi sono creduto in debito di far conoscere questa circostanza, esternando in pari tempo il desiderio che il sig.* DINI *pubblichi la sua dimostrazione, che è intieramente diversa da quella che precede. Il confronto dei due metodi non può che recare maggior luce sopra un soggetto non privo d'interesse.*

XIII.

SUR LA COURBURE DE QUELQUES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, deuxième série, tome IV (1865), pp. 258-267.

Dans une Note insérée dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées *), M. de la GOURNERIE a fait des remarques importantes au sujet des sections déterminées dans une surface par ses plans tangents. Il a, entre autres choses, établi bien clairement que les deux branches de ces sections n'ont, en général, qu'un contact du premier ordre avec les lignes asymptotiques de la surface.

En cherchant à déterminer la courbure de ces sections, au point où leur plan est tangent à la surface, je suis parvenu au théorème suivant :

Le rayon de courbure d'une ligne asymptotique, sur une surface quelconque, est toujours les deux tiers de celui de la section faite à la surface par le plan tangent au point considéré.

(Il est sous-entendu que l'on considère la branche de cette section tangente à la ligne asymptotique).

Désignons par s l'arc de la ligne asymptotique, et par $\varphi = 0$ l'équation de la surface. La propriété caractéristique de cette ligne est exprimée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d^2 x}{d s^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^2 y}{d s^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d^2 z}{d s^2} = 0 ,$$

*) 2me série, t. III (1858), pag. 73.

ou, en prenant la derivée par rapport à s de l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}=0$$

(qui exprime que la ligne est tracée sur la surface), par cette autre équation

$$(3)\qquad \frac{dx}{ds}d\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{dy}{ds}d\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{dz}{ds}d\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

qui revient à celle dont se sert M. Dupin. Si l'on prend de nouveau la dérivée par rapport a s de cette dernière équation, on trouve, après quelques réductions,

$$(4)\qquad \frac{d^2x}{ds^2}d\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{d^2y}{ds^2}d\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{d^2z}{ds^2}d\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\Omega}{2ds^2}=0,$$

où Ω représente la somme des termes en $\frac{h^3}{6}$ dans le développement de

$$\varphi(x+h\,dx,\quad y+h\,dy,\quad z+h\,dz).$$

Les deux équations (2), (3), combinées avec la suivante

$$(5)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

déterminent, pour chaque point de la surface, les directions des deux branches asymptotiques qui s'y entrecoupent, de sorte qu'on peut les regarder comme connues. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ aient un des systèmes de valeurs fournis par (2), (3), (5).

Désignons par k un rapport à déterminer, et par h^2 la somme des carrés des trois dérivées partielles de la fonction φ: de l'équation (1) et de la suivante

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

on tire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2}&=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dz}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{ds^2}&=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dz}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{ds^2}&=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds}\right).\end{aligned}\right.$$

En ajoutant les carrés des deux membres de ces trois équations, on obtient

$$k = \pm \frac{1}{\rho h},$$

où ρ est le rayon de courbure. Remplaçant dans l'équation (4) les dérivées secondes des coordonnées par les valeurs (7), en posant, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} d\frac{\partial \varphi}{\partial x} & d\frac{\partial \varphi}{\partial y} & d\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \Delta,$$

on a cette valeur de ρ

$$\rho = \pm \frac{2\Delta ds}{h\Omega}. \tag{8}$$

On peut facilement transformer cette expression. Élevant le déterminant Δ au carré et tenant compte des formules précédentes, on trouve aisément

$$\Delta = \pm h ds \sqrt{\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - (dh)^2},$$

ou bien

$$\Delta = \pm h^2 ds \sqrt{\left(d\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{h}\right)^2}.$$

Si donc on appelle $d\psi$ la déviation de la normale à la surface le long de l'arc ds, on a simplement

$$\Delta = \pm h^2 ds d\psi,$$

et par suite

$$\rho = \pm \frac{2hds^2 d\psi}{\Omega}.$$

Cette dernière formule donne lieu à quelques remarques, que nous ne croyons pas devoir passer sous silence, quoique étrangères à notre sujet.

Lorsque $\varphi(x, y, z)$ est une fonction entière du second degré, ses dérivées troisièmes étant nulles, il en est de même de Ω. Par suite, les deux systèmes de lignes asymptotiques ont partout un rayon de courbure infini, et ne peuvent être par conséquent que des lignes droites. Nous retrouvons ainsi le théorème connu, que *chaque surface du second degré est le lieu géométrique de deux systèmes de lignes droites* (réelles ou imaginaires).

La tangente à une ligne asymptotique étant conjuguée à elle-même, il est évident que pour toute surface réglée une des séries de lignes asymptotiques est formée par les génératrices rectilignes de la surface. Il faut donc que la quantité Ω soit annulée par la substitution des valeurs de dx, dy, dz répondant à la direction d'une génératrice. Donc si l'on élimine dx, dy, dz entre les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

$$d\frac{\partial \varphi}{\partial x} . dx + d\frac{\partial \varphi}{\partial y} . dy + d\frac{\partial \varphi}{\partial z} . dz = 0,$$

$$\Omega = 0,$$

le résultat de cette élimination sera une équation aux dérivées partielles du premier, deuxième et troisième ordre de la fonction φ, qu'on devra regarder comme appartenant à toutes les surfaces qu'on peut concevoir engendrées par le mouvement d'une droite. Ce résultat s'accorde avec celui auquel MONGE est parvenu d'une manière différente au § XXI de son grand ouvrage sur l'*Application de l'Analyse à la Géométrie.*

Revenons à notre question. La ligne plane, intersection de la surface par le plan tangent au point (x, y, z) est représentée par le système des deux équations suivantes :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ &(\xi - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right.$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées courantes. Désignant par σ l'arc de cette courbe, on déduit de la première de ces deux équations, par trois dérivations successives,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2} + \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{d\sigma}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}}{d\sigma}\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{d^3\eta}{d\sigma^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{d^3\zeta}{d\sigma^3} + 3\left(\frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{d\sigma}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{d\sigma}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}}{d\sigma}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right) \\ &\qquad + \frac{\Omega'}{d\sigma^3} = 0, \end{aligned} \right.$$

où Ω' a une signification analogue à celle de Ω. La seconde des équations (9), où

x, y, z entrent comme des constantes, donne de son côté

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d\zeta}{d\sigma}=0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}=0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^3\eta}{d\sigma^3}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d^3\zeta}{d\sigma^3}=0.$$

Si l'on pose, dans les équations (10), $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$, en tenant compte des trois dernières équations et en remarquant qu'au point considéré la section plane est tangente à la ligne asymptotique, on trouve : d'abord les équations (2), (3) ci-dessus, puis

$$(4') \qquad d\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+d\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+d\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)+\frac{\Omega}{3ds^2}=0,$$

où $\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)$, etc., représentent les valeurs que prennent les dérivées secondes $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}, \ldots$ pour $\xi = x$, $\eta = z$, $\zeta = z$. D'ailleurs, on a évidemment aussi

$$(1') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0,$$

$$(6') \qquad \frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0,$$

donc si l'on opère sur les équations (1'), (6') et (4') de la même manière que l'on a opéré ci-devant sur les équations (1), (6), (4), et qu'on désigne par ρ' le rayon de courbure de la ligne plane, au point et sur la branche que l'on considère, on trouvera évidemment

$$(8') \qquad \rho' = \pm \frac{3\Delta ds}{h\Omega},$$

et par conséquent

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{2}{3},$$

d'où résulte la propriété énoncée.

Les formules (8), (8') deviennent illusoires pour les surfaces développables, puisque $d\psi$ et Ω s'y annulent en même temps. Dans ces surfaces, les deux séries de lignes asymptotiques se réduisent à une seule : c'est le système des génératrices rectilignes, qui en sont en même temps des lignes de courbure. Le rayon ρ est donc en général infini. Cependant l'arête de rebroussement de la surface, ayant elle aussi ses normales

dans le plan tangent à la surface, peut être regardée comme une ligne asymptotique *singulière,* dont le rayon de courbure n'est généralement ni nul ni infini. Le lieu des points communs à la surface développable et à un de ses plans tangents se compose évidemment de la génératrice de contact, qui joue le rôle d'une droite double, et d'une ligne courbe qui touche cette génératrice au même point que l'arête de rebroussement. On a donc, en ce point, une ligne asymptotique et une section plane tangente à la surface, dont les courbures ne peuvent pas être tirées des formules précédentes et qui doivent être déterminées directement.

Pour cet objet nous remarquons d'abord que la courbe plane est, dans ce cas, le lieu du point d'intersection d'une tangente mobile de la ligne à double courbure, qui constitue l'arête de rebroussement de la surface développable, avec un des plans osculateurs de cette même ligne. Nous rapporterons donc l'arête de rebroussement aux trois axes des x, y, z formés respectivement par la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur au point que l'on considère. D'après ce choix de coordonnées les points très voisins de l'origine peuvent être représentés par les formules suivantes:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{3\rho_0^2} + \cdots, \\ y &= \frac{s^2}{2\rho_0} + \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} \right)_0 \frac{s^3}{6} + \cdots, \\ z &= \frac{s^3}{6 r_0 \rho_0} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

où s est l'arc compté de l'origine, dans le sens des x positives, ρ, r sont les rayons de première et deuxième courbure, et l'indice o marque ce qui se rapporte à l'origine. Ces formules s'obtiennent aisément en étendant aux lignes à double courbure le procédé exposé pour les courbes planes aux §§ 516, 517 de l'excellent *Traité de Calcul différentiel* de M. BERTRAND. La valeur de z résulte immédiatement aussi d'un théorème de M. BONNET, demontré au § 608 du même ouvrage.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées courantes de la tangente à la ligne s, et par λ la portion de cette tangente comprise entre le point de contact (x, y, z) et le point (ξ, η, ζ) : on aura

$$\xi = x + \lambda \frac{dx}{ds}, \qquad \eta = y + \lambda \frac{dy}{ds}, \qquad \zeta = z + \lambda \frac{dz}{ds}.$$

Remplaçant x, y, z par leurs valeurs (11), posant $\zeta = 0$, tirant la valeur de λ et substituant dans les expressions de ξ, η, on trouvera

$$\xi_0 = \frac{2s}{3} + \cdots, \qquad \eta_0 = \frac{s^2}{6\rho_0} + \cdots,$$

ξ_0, η_0 étant les coordonnées du point d'intersection de la tangente avec On aura donc, pour l'arc σ de la courbe plane lieu des points (ξ_0, η_0),

$$\sigma = \frac{2s}{3} + \cdots,$$

d'où l'on tire

$$\xi_0 = \sigma + \cdots, \qquad \eta_0 = \frac{3\sigma^2}{8\rho_0} + \cdots.$$

Or en nommant ρ' le rayon de courbure de cette dernière courbe et appliquant à celle-ci les formules (11), on aurait

$$\xi_0 = \sigma + \cdots, \qquad \eta_0 = \frac{\sigma^2}{2\rho'_0} + \cdots.$$

La comparaison de ces valeurs avec les précédentes donne

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0} = \frac{3}{4}.$$

[La démonstration précédente aurait été rendue plus rigoureuse par l'introduction d'un terme en s^4, à coefficient indéterminé, dans les formules (11). J'ai omis cette précaution dans le désir d'abréger].

Ainsi, *la tangente mobile d'une ligne à double courbure décrit, sur un quelconque de ses plans osculateurs, une courbe plane qui touche cette ligne au point d'osculation; le rayon de courbure de le ligne à double courbure est toujours, en ce point, les trois quarts du rayon de courbure de la courbe plane au même point.*

On sait que M. Möbius a démontré que la tangente mobile d'une cubique gauche décrit sur chacun de ses plans osculateurs une ligne du deuxième degré. D'après le théorème qui précède, on voit que la détermination du rayon de courbure d'une cubique gauche est ramenée a celle du rayon de courbure d'une section conique.

Je termine en exprimant le désir que mes théorèmes puissent être vérifiés par des considérations géométriques directes, ce qui ne pourra pas manquer d'avoir lieu, si quelqu'un des savants collaborateurs de ce journal veut bien s'en occuper.

XIV.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA: "RIPORTARE I PUNTI DI UNA SUPERFICIE SOPRA UN PIANO IN MODO CHE LE LINEE GEODETICHE VENGANO RAPPRESENTATE DA LINEE RETTE".

Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VII (1865), pp. 185-204.

I.

Nella maggior parte delle ricerche che sono state fin quì istituite dai geometri intorno alla teoria delle carte geografiche, si sono prese le mosse o dal principio della conservazione degli angoli (cioè della similitudine fra le figure infinitesime), o da quello della conservazione dei rapporti d'area.

Benchè questi due principii sieno da riguardarsi come i più semplici ed i più importanti, può darsi tuttavia il caso che se ne debba prescindere, per adottarne qualche altro più rispondente al fine speciale della carta che si vuol costruire.

Così, se la carta dovesse principalmente servire alla misura delle distanze, converrebbe escludere quelle projezioni per le quali le curve di minima distanza sulla superficie terrestre venissero ad essere rappresentate da linee troppo sensibilmente diverse dalla retta. Fra quelle considerate fin quì, la sola projezione centrale nella sfera ha la proprietà di trasformare in linee rette le curve summenzionate; e LAGRANGE riguarda a ragione questa proprietà come un pregio speciale di essa *).

Siccome, fra le proprietà di cui può essere dotata una carta, quella di prestarsi alla facile misura delle distanze non è certamente la meno utile, così io aveva pen-

*) Nelle Memorie di Berlino per l'anno 1779; oppure *Œuvres*, t. IV, pag. 635 (Paris, 1869).

sato che la risoluzione generale del problema formulato nel titolo di questo scritto potrebbe essere di qualche giovamento. Oltre la sua applicazione alla teoria delle carte geografiche, essa mi sembrava promettere un nuovo metodo di calcolo geodetico, nel quale tutte le quistioni relative a triangoli formati da linee geodetiche sopra una superficie sarebbero ridotte a semplici quistioni di trigonometria piana.

Ma l'investigazione da me istituita in proposito mi ha condotto a riconoscere che il detto problema non ammette una risoluzione generale, e che il caso della projezione centrale nella sfera è sostanzialmente il solo nel quale sia realizzabile la condizione prescritta.

La singolarità di questo risultato mi sembrò atta a giustificare la pubblicazione delle mie ricerche su questo soggetto, quantunque ne risulti dimostrata l'impossibilità di raggiungere pienamente lo scopo pel quale esse vennero iniziate.

II.

Sieno x, y le coordinate rettilinee dei punti del piano, non importa se rettangolari od oblique; X, Y le coordinate curvilinee dei punti corrispondenti della superficie. Supposto che sia possibile soddisfare alle condizioni del problema, le x, y saranno legate alle X, Y da due relazioni

$$x = u(X, Y), \qquad y = v(X, Y),$$

la natura delle quali dovrà esser tale che ad una retta qualunque del piano

$$ax + by + c = 0,$$

corrisponda sulla superficie una linea geodetica. Ora l'equazione in coordinate curvilinee della curva corrispondente a questa retta è evidentemente

$$au(X, Y) + bv(X, Y) + c = 0;$$

bisognerà dunque che quest'equazione rappresenti una linea geodetica, ovvero che, riguardando le a, b, c come costanti arbitrarie, essa rappresenti l'integrale completo dell'equazione delle linee geodetiche.

Ma nulla impedisce di riguardare come coordinate curvilinee della superficie le stesse funzioni $u(X, Y)$, $v(X, Y)$, anzichè le X, Y. Quindi è chiaro che il nostro problema si riduce a trovare come e quando sia possibile integrare l'equazione delle linee geodetiche per mezzo della relazione lineare

$$au + bv + c = 0,$$

o, ciò che torna allo stesso, come e quando l'equazione differenziale delle linee geo-

detiche sia riducibile alla forma

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = 0\,. \tag{1}$$

Trovate le superficie e le variabili per le quali ciò abbia luogo, basterà porre

$$x = u\,, \qquad y = v\,,$$

od anche

$$x = au + bv + c\,, \qquad y = a'u + b'v + c',$$

od anche più in generale

$$x = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}\,, \qquad y = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}\,.$$

Queste ultime formole corrispondono ad una trasformazione omografica della figura rappresentata dalle formole $x = u$, $y = v$.

III.

Per trovare le condizioni sotto le quali l'equazione differenziale delle linee geodetiche è riducibile alla forma (1), rammentiamo che, rappresentando al solito con

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie, la suddetta equazione differenziale è la seguente:

$$\begin{aligned} 0 &= (EG - F^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u) \\ &+ (E\,du + F\,dv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2\right] \\ &- (F\,du + G\,dv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v}dv\,du + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2\right] \text{*)}. \end{aligned}$$

Dovendosi annullare i coefficienti di du^3, du^2dv, $du\,dv^2$, dv^3 si avranno queste quattro condizioni

$$E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} = 0\,, \tag{2}$$

---

*) Veggasi per es. l'articolo XXI delle mie *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* nel Giornale di Matematiche, tomo III; oppure in queste OPERE, vol. I, pag. 175.

$$E\frac{\partial G}{\partial u}+F\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}=0, \tag{3}$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v}+F\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-F\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}=0, \tag{4}$$

$$G\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}=0. \tag{5}$$

Il nostro problema dipende adunque dalla integrazione simultanea di queste equazioni, e poichè il loro numero è maggiore di quello delle funzioni da determinare, si può già prevedere l'impossibilità di risolverlo generalmente.

IV.

La (2) e la (5) si possono mettere sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

e quindi esprimono che i due binomj

$$\frac{E\,du+F\,dv}{\sqrt{E}}, \qquad \frac{F\,du+G\,dv}{\sqrt{G}} \tag{6}$$

devono essere differenziali esatti a due variabili.

È bene osservare che queste due equazioni non impongono alla superficie veruna condizione speciale. Infatti, annullandosi per esse i coefficienti di du^3 e dv^3 nell'equazione differenziale delle linee geodetiche, l'equazione stessa è soddisfatta tanto per $du=0$, quanto per $dv=0$, il che significa semplicemente che le linee coordinate $u=$ cost., $v=$ cost. devono essere geodetiche. Ciò si deduce anche dalle note espressioni delle curvature geodetiche relative alle linee $u=$ cost., $v=$ cost., le quali sono annullate dalle (2), (5) [come si può vedere nelle citate *Ricerche*, eq. (60)].

V.

Consideriamo ora le (3), (4). Eliminando $\frac{\partial E}{\partial v}$ fra la (2) e la (3), e $\frac{\partial G}{\partial u}$ fra la (5) e la (4), si ottengono le due equazioni

$$E\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{3F^2}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}=0,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{3F^2}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} = 0,$$

che hanno il vantaggio di contenere le derivate relative ad una sola variabile.

L'eliminazione effettuata è sempre possibile. Infatti quand'anche, per una determinata scelta delle variabili, le due derivate $\frac{\partial E}{\partial v}$, $\frac{\partial G}{\partial u}$ fossero nulle, cesserebbero d'essere tali surrogando alle u, v le nuove variabili $au + bv + c$, $a'u + b'v + c'$, surrogazione che non altera punto le condizioni del problema.

Si può verificare facilmente che le due precedenti equazioni sono riducibili alla forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}}\right) = 0,$$

laonde se indichiamo con U, V due funzioni da determinarsi, la prima della sola u, la seconda della sola v, possiamo porre

$$(7) \qquad \frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} = V^3, \qquad \frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}} = U^3.$$

Bisogna ora vedere se sia possibile determinare le U, V in modo che i due binomj (6) diventino differenziali esatti.

VI.

Introducendo una funzione incognita di u e di v, che diremo λ, possiamo soddisfare alle (7) ponendo

$$(8) \qquad \sqrt{E} = \lambda U, \qquad F = \lambda\mu UV, \qquad \sqrt{G} = \lambda V,$$

dove si è fatto per brevità

$$(9) \qquad \mu = \sqrt{\lambda(\lambda - UV)}.$$

I due binomj (6) diverranno

$$\lambda U du + \mu V dv, \qquad \mu U du + \lambda V dv,$$

o più semplicemente

$$\lambda du_1 + \mu dv_1, \qquad \mu du_1 + \lambda dv_1,$$

ponendo

$$(10) \qquad du_1 = U du, \qquad dv_1 = V dv,$$

ed immaginando sostituite le u_1, v_1 alle u, v tanto nelle funzioni λ, μ, quanto nelle U, V.

Le condizioni per l'integrabilità dei due ultimi binomj sono

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v_1} = \frac{\partial \mu}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \mu}{\partial v_1}.$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial u_1} - \frac{\partial (\lambda + \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

$$\frac{\partial (\lambda - \mu)}{\partial u_1} + \frac{\partial (\lambda - \mu)}{\partial v_1} = 0,$$

e quindi, integrando,

$$\lambda + \mu = 2\varphi(u_1 + v_1),$$

$$\lambda - \mu = 2\psi(u_1 - v_1),$$

dove φ, ψ sono caratteristiche di funzioni arbitrarie.

Ponendo finalmente

$$(11) \qquad u_1 + v_1 = \alpha, \qquad u_1 - v_1 = \beta,$$

si ha

$$(12) \qquad \lambda = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \qquad \mu = \varphi(\alpha) - \psi(\beta).$$

VII.

Restano ora a determinare le φ, ψ, U, V in modo che risulti soddisfatta la (9), ossia la

$$\lambda U V = \lambda^2 - \mu^2,$$

cioè, per le (12),

$$(\varphi + \psi) U V = 4\varphi\psi.$$

Per tal uopo poniamo

$$(13) \qquad \varphi = \frac{1}{\Phi}, \qquad \psi = \frac{1}{\Psi},$$

talchè la precedente equazione diventerà

$$(14) \qquad \Phi(\alpha) + \Psi(\beta) = \frac{4}{UV},$$

donde

$$\log(\Phi + \Psi) = \log 4 - \log U - \log V.$$

Ora U è funzione di u_1 ossia di $\frac{\alpha + \beta}{2}$, V è funzione di v_1 ossia di $\frac{\alpha - \beta}{2}$, quindi il secondo membro è della forma

$$f(\alpha + \beta) + F(\alpha - \beta),$$

epperò soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = 0,$$

alla quale deve quindi soddisfare anche il primo membro. Si ottiene così

$$(\Phi + \Psi)\frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = (\Phi + \Psi)\frac{d^2 \Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2,$$

ossia

$$\Phi \frac{d^2 \Psi}{d\beta^2} - \Psi \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = A(\alpha) - B(\beta), \tag{15}$$

ponendo

$$\Phi \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} - \left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)^2 = A(\alpha),$$

$$\Psi \frac{d^2 \Psi}{d\beta^2} - \left(\frac{d\Psi}{d\beta}\right)^2 = B(\beta).$$

Finalmente derivando la (15) due volte di seguito prima rispetto ad α, poi rispetto a β, si ha

$$\frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d^3 \Psi}{d\beta^3} - \frac{d\Psi}{d\beta}\frac{d^3 \Phi}{d\alpha^3} = 0. \tag{16}$$

Se nessuna delle quattro quantità che entrano in quest'equazione è nulla, è chiaro che l'indipendenza delle variabili α e β richiede necessariamente che sia

$$\frac{d^3 \Phi}{d\alpha^3} = r^2 \frac{d\Phi}{d\alpha}, \qquad \frac{d^3 \Psi}{d\beta^3} = r^2 \frac{d\Psi}{d\beta}, \tag{17}$$

dove r è una costante reale od immaginaria della forma $r'i$, ma sempre differente da zero.

Se invece qualcuna di quelle quantità è nulla, si dovrà porre

$$\frac{d^3 \Phi}{d\alpha^3} = 0, \qquad \frac{d^3 \Psi}{d\beta^3} = 0, \tag{17'}$$

quando nessuna delle derivate prime è nulla; oppure

$$\Psi = \text{cost.} \tag{17''}$$

quando una delle derivate prime, per es. quella di Ψ, è nulla.

Se fossero costanti ambedue le funzioni Φ, Ψ, la superficie risulterebbe sviluppabile. Noi non ci occuperemo punto di questo caso, per sè stesso evidente.

VIII.

Consideriamo dapprima le (17) dalle quali si deduce

$$\Phi(\alpha) = A_0 + A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha},$$

$$\Psi(\beta) = B_0 + B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta},$$

donde

$$A(\alpha) = r^2[A_0(A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha}) + 4 A_1 A_2],$$

$$B(\beta) = r^2[B_0(B_1 e^{r\beta} + B_2 e^{-r\beta}) + 4 B_1 B_2],$$

valori che riducono l'equazione (15) alla seguente:

$$0 = r^2[(A_0 + B_0)(A_1 e^{r\alpha} + A_2 e^{-r\alpha} - B_1 e^{r\beta} - B_2 e^{-r\beta}) + 4(A_1 A_2 - B_1 B_2)].$$

Essendo r diverso da zero bisogna dunque porre

$$A_0 + B_0 = 0, \qquad A_1 A_2 = B_1 B_2,$$

condizioni alle quali si può soddisfare cambiando le costanti e ponendo

$$A_0 = -B_0 = -2h, \qquad A_1 = A, \qquad A_2 = kk'A,$$

$$B_1 = k'A, \qquad B_2 = kA,$$

nel qual modo si avrà

$$(18) \qquad \begin{cases} \Phi = A(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h, \\ \Psi = A(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h. \end{cases}$$

Così tutte le condizioni imposte dal problema alle funzioni Φ, Ψ sono soddisfatte.

IX.

Bisogna ora determinare le U, V.

Per tal uopo osserviamo che si ha

$$\Phi + \Psi = A(1 + ke^{-r(\alpha+\beta)})(e^{r\alpha} + k'e^{r\beta}),$$

e, riponendo le variabili u_1, v_1 in luogo delle α, β mediante le (11),

$$\Phi + \Psi = A(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1}).$$

Confrontando quest'equazione colla (14) si vede doversi porre

$$(19) \qquad U = \frac{2}{m(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})}, \qquad V = \frac{2}{m'(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1})},$$

purchè si faccia

$$A = m m'.$$

Si avrà poscia, per le (13),

$$(20)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha) = \dfrac{1}{m m'(e^{r\alpha} + k k' e^{-r\alpha}) - 2h}, \\[2ex] \psi(\beta) = \dfrac{1}{m m'(k' e^{r\beta} + k e^{-r\beta}) + 2h}, \end{cases}$$

e finalmente, dalle (8),

$$(21)\qquad E = (\varphi + \psi)^2 U^2, \qquad F = (\varphi^2 - \psi^2) U V, \qquad G = (\varphi + \psi)^2 V^2.$$

X.

Prima di dedurre dai risultati precedenti la forma finale delle E, F, G espresse per u, v, osserviamo che dalle (21) si deduce

$$d s^2 = (\varphi + \psi)[\varphi(U d u + V d v)^2 + \psi(U d u - V d v)^2],$$

ossia, per le (10), (11),

$$(22)\qquad d s^2 = (\varphi + \psi)(\varphi\, d\alpha^2 + \psi\, d\beta^2).$$

Questo risultato c'insegna che le α, β sono coordinate isoterme della superficie, e che la forma dell'elemento lineare ad esse corrispondente è una di quelle che dànno luogo all'integrazione completa del problema delle linee geodetiche, come dimostrarono i sigg. LIOUVILLE e BRIOSCHI.

Ma l'equazione (22) è suscettibile di una ulteriore trasformazione. Infatti il suo secondo membro può riguardarsi come il prodotto di due somme di quadrati e può quindi, colla nota regola, esser messo sotto la forma di una somma di due quadrati, nel modo seguente:

$$d s^2 = (\varphi\, d\alpha \pm \psi\, d\beta)^2 + \varphi\psi(d\alpha \mp d\beta)^2.$$

Quindi se si pone

$$(21')\qquad \varphi\, d\alpha - \psi\, d\beta = d t, \qquad \varphi\, d\alpha + \psi\, d\beta = d\tau,$$

si hanno le due espressioni

$$(22')\qquad d s^2 = d t^2 + 4\varphi\psi\, d u_1^2 = d\tau^2 + 4\varphi\psi\, d v_1^2,$$

le quali insegnano che le linee geodetiche $u_1 =$ cost., $v_1 =$ cost. hanno per trajettorie ortogonali le linee $t =$ cost., $\tau =$ cost. rispettivamente.

XI.

Veniamo ora alla determinazione delle E, F, G, in funzione delle u, v. Dalle (10) si ha

$$u = \int \frac{du_1}{U}, \qquad v = \int \frac{dv_1}{V},$$

quindi, viste le (19),

$$u = \frac{m}{2r}(e^{ru_1} - k e^{-ru_1}), \qquad v = \frac{m'}{2r}(e^{rv_1} - k' e^{-rv_1}),$$

omettendo per semplicità le costanti d'integrazione, che si possono riguardare come implicite in u, v.

Dai valori precedenti si deduce

$$e^{ru_1} + k e^{-ru_1} = \frac{2\sqrt{r^2 u^2 + k m^2}}{m},$$

$$e^{rv_1} + k' e^{-rv_1} = \frac{2\sqrt{r^2 v^2 + k' m'^2}}{m'},$$

talchè le espressioni di U, V in u, v, sono

$$U = \frac{1}{\sqrt{r^2 u^2 + k m^2}}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{r^2 v^2 + k' m'^2}}.$$

Inoltre ponendo

$$W^2 = (r^2 u^2 + k m^2)(r^2 v^2 + k' m'^2),$$

si trova facilmente

$$e^{r\alpha} + k k' e^{-r\alpha} = \frac{2(W + r^2 u v)}{m m'},$$

$$k' e^{r\beta} + k e^{-r\beta} = \frac{2(W - r^2 u v)}{m m'},$$

e quindi, (20),

$$2\varphi = \frac{1}{W + (r^2 u v - h)}, \qquad 2\psi = \frac{1}{W - (r^2 u v - h)}.$$

Finalmente, cambiando $k m^2$, $k' m'^2$ in k, k', ciò che è lecito ora che le costanti k, m non compajono più separate, e ponendo quindi

$$W^2 = (r^2 u^2 + k)(r^2 v^2 + k'), \tag{23}$$

si trovano i valori seguenti:

$$
(24)\qquad \left\{
\begin{aligned}
E &= \frac{r^2 v^2 + k'}{[W^2 - (r^2 u v - h)^2]^2}\,,\\
F &= -\frac{r^2 u v - h}{[W^2 - (r^2 u v - h)^2]^2}\,,\\
G &= \frac{r^2 u^2 + k}{[W^2 - (r^2 u v - h)^2]^2}\,,\\
E G - F^2 &= \frac{1}{[W^2 - (r^2 u v - h)^2]^3}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

XII.

Dalle cose dette alla fine dell'art. II risulta che alle variabili u, v soddisfacenti al problema possono essere surrogate altre variabili legate linearmente ad esse, senza che le condizioni del problema vengano mutate. Poichè dunque le formole (24) dànno una soluzione del problema, bisogna che in particolare ogni sostituzione della forma

$$u = a u' + b v', \qquad v = a' u' + b' v'$$

lasci inalterata la composizione di quelle formole.

Verifichiamo questa proprietà.

Rappresentando con

$$d s^2 = E' d u'^2 + 2 F' d u' d v' + G' d v'^2$$

la nuova espressione dell'elemento lineare, si ha

$$
\begin{aligned}
E' &= E a^2 + 2 F a a' + G a'^2,\\
F' &= E a b + F(a b' + a' b) + G a' b',\\
G' &= E b^2 + 2 F b b' + G b'^2.
\end{aligned}
$$

Quindi, ponendo per brevità

$$
\begin{aligned}
\frac{k' a^2 + 2 h a a' + k a'^2}{(a b' - a' b)^2} &= K',\\
\frac{k' a b + h(a b' + a' b) + k a' b'}{(a b' - a' b)^2} &= H,\\
\frac{k' b^2 + 2 h b b' + k b'^2}{(a b' - a' b)^2} &= K,
\end{aligned}
$$

si trova

$$E' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 v'^2 + K')}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2},$$

$$F' = -\frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 u'v' - H)}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2},$$

$$G' = \frac{(ab' - a'b)^2 (r^2 u'^2 + K)}{[W^2 - (r^2 uv - h)^2]^2}.$$

Ma è noto che si ha

$$E'G' - F'^2 = (ab' - a'b)^2 (EG - F^2),$$

quindi, ponendo

$$W'^2 = (r^2 u'^2 + K)(r^2 v'^2 + K'),$$

si ha

$$W^2 - (r^2 uv - h)^2 = (ab' - a'b)^2 [W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2],$$

epperò

$$E' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 v'^2 + K'}{[W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2]^2},$$

$$F' = \frac{-1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 u'v' - H}{[W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2]^2},$$

$$G' = \frac{1}{(ab' - a'b)^2} \frac{r^2 u'^2 + K}{[W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2]^2}.$$

Ora egli è evidente che queste espressioni hanno la stessa forma delle (24), e ne differiscono soltanto in ciò che alle costanti r^2, h, k, k' si trovano sostituite le

$$\mu r^2, \quad \mu H, \quad \mu K, \quad \mu K',$$

dove

$$\mu = (ab' - a'b)^{\frac{2}{3}}.$$

Dunque la proprietà in discorso è realmente verificata.

XIII.

Disponiamo delle costanti a, b, a', b' talmente da rendere

$$H = 0, \qquad K = K',$$

ciò che è sempre possibile, ed in molti modi, quando non si escludano valori immaginarj di quei coefficienti.

Osservando che in tal caso si ha

$$W'^2 - (r^2 u'v' - H)^2 = K(r^2 u'^2 + r^2 v'^2 + K),$$

si trova

$$E' = \frac{r^2 v'^2 + K}{\mu^3 K^2 (r^2 u'^2 + r^2 v'^2 + K)^2},$$

$$F' = \frac{- r^2 u'v'}{\mu^3 K^2 (r^2 u'^2 + r^2 v'^2 + K)^2},$$

$$G' = \frac{r^2 u'^2 + K}{\mu^3 K^2 (r^2 u'^2 + r^2 v'^2 + K)^2}.$$

Poniamo finalmente, per maggiore semplicità,

$$\frac{K}{r^2} = a^2, \qquad \frac{1}{\mu^3 K^2 r^2} = R^2,$$

e scriviamo u, v in luogo di u', v': avremo

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{R^2 (v^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ F &= \frac{- R^2 u v}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ G &= \frac{R^2 (u^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

XIV.

Abbiamo per tal modo determinata la forma dell'elemento lineare della superficie, vale a dire individuata una classe di superficie, tutte applicabili l'una sull'altra e tutte soddisfacenti al problema proposto.

Per formarsi un'idea della natura comune di tutte queste superficie bisogna dunque fare appello alle proprietà *assolute*, prima delle quali è la misura della curvatura, data dalla formola *)

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right]$$

*) Veggasi per es. l'art. XXIV delle citate mie *Ricerche*.

ovvero, nel caso nostro, vista la (2),

$$\frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right).$$

Ponendo per un momento

$$\Delta^2 = u^2 + v^2 + a^2,$$

si trova

$$\frac{\partial E}{\partial v} = - \frac{2R^2(\Delta^2 - 2u^2)v}{\Delta^6}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = - \frac{2R^2(\Delta^2 - 2v^2)u}{\Delta^6},$$

donde

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} = - \frac{2a}{v^2 + a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial u},$$

quindi

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R^2} \frac{\Delta^3}{v^2 + a^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial u^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Dunque le nostre superficie sono quelle di curvatura costante. In particolare, se R è quantità reale, le formole (25) competono a tutte le superficie applicabili sulla sfera di raggio R.

XV.

È noto che le espressioni finite in u, v delle coordinate ordinarie X, Y, Z relative alle superficie di curvatura costante non sono ancora state determinate in generale. Quelle relative alla superficie sferica tipo sono le seguenti:

$$X = \alpha + \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Y = \beta + \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

$$Z = \gamma + \frac{Ra}{\sqrt{u^2 + v^2 + a^2}},$$

donde eliminando u, v, si trae

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = R^2,$$

α, β, γ essendo costanti arbitrarie. Infatti le precedenti espressioni dànno

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{R^2\,[(v^2+a^2)\,du^2 - 2\,u\,v\,du\,dv + (u^2+a^2)\,dv^2]}{(u^2+v^2+a^2)^2},$$

donde si deducono per E, F, G i valori precedenti.

Le u, v hanno un significato geometrico semplicissimo.

Infatti trasportiamo il centro della sfera nel punto di coordinate $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -a$, e si avrà

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{R\,u}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}},\\ Y &= \frac{R\,v}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}},\\ Z &= \frac{R\,a}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}} - a. \end{aligned}\right.$$

Il raggio passante pel punto (X, Y, Z) è rappresentato dalle equazioni

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta + a}{Z + a},$$

epperò le coordinate del suo punto d'incontro col piano XY sono

$$\xi = \frac{a\,X}{Z+a}, \qquad \eta = \frac{a\,Y}{Z+a},$$

ossia per le (26),

$$\xi = u, \qquad \eta = v.$$

Dunque le variabili u, v non sono altro che le coordinate rettangole della projezione centrale di quella sfera sulla quale tutte le nostre superficie sono applicabili, e questa projezione, insieme colle sue trasformazioni omografiche, costituisce l'unica soluzione del problema, almeno finchè si considerano le equazioni (17) dalle quali siamo partiti.

Vedremo ora che anche le equazioni (17′) e (17″) conducono alle medesime conclusioni. Ma per abbreviare il discorso ci contenteremo di dimostrare che anch'esse corrispondono a superficie di curvatura costante, senza punto risalire alle espressioni di E, F, G per u, v, che ognuno potrà facilmente ottenere procedendo in modo analogo a quello che si è usato or ora, e che si possono agevolmente ridurre alla medesima forma (25).

XVI.

Incominciamo dalle (17'). Esse dànno

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2,$$

$$\Psi = B_0 + B_1\beta + B_2\beta^2,$$

epperò la (15) diventa

$$2(A_2 + B_2)(A_1\alpha + A_2\alpha^2 - B_1\beta - B_2\beta^2) = 2(A_0 + B_0)(A_2 - B_2) - A_1^2 + B_1^2.$$

Porremo quindi

$$A_2 + B_2 = 0, \qquad 2(A_0 + B_0)(A_2 - B_2) = A_1^2 - B_1^2.$$

Quest'ultima relazione, in forza della precedente, può scriversi

$$4A_0A_2 - A_1^2 = 4B_0B_2 - B_1^2.$$

Se fosse $A_2 = B_2 = 0$, si avrebbe quindi

$$\Phi = A_0 + A_1\alpha, \qquad \Psi = B_0 \pm A_1\beta,$$

o più semplicemente

$$\Phi = 2A\alpha, \qquad \Psi = \pm 2A\beta, \tag{27}$$

poichè in forza delle (10), (11) si può alle α, β aggiungere una costante.

Se invece A_2 e B_2 non sono nulli, si soddisferà alle condizioni trovate ponendo

$$\Phi = A[(\alpha - a)^2 - c^2], \qquad \Psi = -A[(\beta - b)^2 - c^2],$$

o più semplicemente

$$\Phi = A(\alpha^2 - c^2), \qquad \Psi = -A(\beta^2 - c^2). \tag{27'}$$

1° Nel caso delle formole (27) si ha dalle (13)

$$\varphi = \frac{1}{2A\alpha}, \qquad \psi = \pm\frac{1}{2A\beta},$$

$$\varphi\, d\alpha \mp \psi\, d\beta = \frac{1}{2A}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\beta}{\beta}\right).$$

Scrivendo dunque indifferentemente t per τ [ved. le eq. (21')], si ha

$$t = \frac{1}{2A}\log\frac{\alpha}{\beta},$$

donde

$$u_1 \operatorname{sen h} At = v_1 \cos h At.$$

Quando si prende il segno superiore si ha

$$\alpha = u_1(1 + \operatorname{tgh} At), \qquad \beta = u_1(1 - \operatorname{tgh} At),$$

$$\varphi\psi = \left(\frac{\cos h\, At}{2Au_1}\right)^2,$$

epperò

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\cos h\, At}{A}\right)^2 (d \log u_1)^2.$$

Prendendo invece il segno inferiore ed esprimendo α, β per v_1, si trova *)

$$ds^2 = dt^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} h\, At}{iA}\right)^2 (d \log v_1)^2.$$

Ora, quando l'elemento lineare di una superficie ha la forma

$$du^2 + G dv^2,$$

la misura della curvatura è espressa da

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Dunque le due forme precedenti convengono entrambe ad una superficie di curvatura costante uguale a $-A^2$. Nella prima A dev'essere reale, ma nella seconda può essere immaginaria della forma iA'. In questo secondo caso la superficie è applicabile sulla sfera di raggio $\frac{1}{A'}$.

2° Adottando le formole (27') si ha

$$\varphi = \frac{1}{A(\alpha^2 - c^2)}, \qquad \psi = \frac{-1}{A(\beta^2 - c^2)},$$

quindi

$$t = \frac{1}{2Ac} \log \frac{\alpha\beta + c^2 - c(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + c^2 + c(\alpha + \beta)},$$

ossia

$$\frac{u_1^2 - v_1^2 + c^2 - 2cu_1}{u_1^2 - v_1^2 + c^2 + 2cu_1} = e^{2Act},$$

*) Abbiamo cambiato questa e la susseguente espressione del ds^2, dando loro la forma che si conviene alle superficie immaginarie perchè così porta di necessità il calcolo; abbiamo però conservato il ragionamento e lasciato al lettore l'esatta interpretazione delle formule, desiderando di modificare il meno possibile il testo. [N. d. R.].

donde

$$v_1 = \sqrt{u_1^2 + 2 c u_1 \coth A c t + c^2},$$

$$\alpha = u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2 c u_1 \coth A c t + c^2},$$

$$\beta = u_1 - \sqrt{u_1^2 + 2 c u_1 \coth A c t + c^2}.$$

Sostituendo questi valori in φ e ψ si trova

$$4\varphi\psi = -\frac{\operatorname{senh}^2 A c t}{A^2 c^2 u_1^2},$$

e quindi, scrivendo A in luogo di $A c$,

$$d s^2 = d t^2 + \left(\frac{\operatorname{senh} A t}{i A}\right)^2 (d \log u_1)^2.$$

Questa forma dell'elemento lineare corrisponde di nuovo ad una superficie di curvatura costante uguale a $-A^2$.

XVII.

Consideriamo finalmente la soluzione data dalla (17''). Essa rientra in quella che abbiamo dedotta dalla (17). Infatti chiamiamo $2h$ il valore costante di Ψ: sostituendolo nella (15) troveremo

$$(\Phi + 2h)\Phi''(\alpha) - \Phi'(\alpha)^2 = 0,$$

donde

$$\Phi = A e^{r\alpha} - 2h,$$

essendo A, r costanti arbitrarie. Ora questi valori di Φ, Ψ si possono dedurre dai valori (18) ponendo $k = k' = 0$. Non è dunque necessario sviluppare ulteriormente questo caso.

XVIII.

Dalle cose esposte emerge pienamente dimostrato il seguente teorema:

Le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dall'ordinaria omografia *).

*) Cioè distendendo la superficie sopra un piano, si ottiene una figura omografica colla rappresentazione.

Quando non è nulla, questa legge è riducibile alla projezione centrale nella sfera ed alle sue trasformazioni omografiche.

Siccome fra tutte le superficie di curvatura costante, la sola che possa ricevere applicazioni nella teoria delle carte geografiche e nella geodesia è probabilmente la superficie sferica, così dal punto di vista di queste applicazioni viene in tal modo ad essere confermato quello che si asserì in principio, cioè che la sola soluzione del problema è fornita in sostanza dalla projezione centrale.

A rimuovere tuttavia ogni equivoco circa l'estensione ed il significato del precedente teorema sono necessarie due osservazioni.

Primieramente si deve rammentare che gli elementi primitivi della corrispondenza considerata sono i *punti*, così della superficie come del piano. Se si volessero unicamente far corrispondere le rette del piano alle linee geodetiche della superficie, la quistione diventerebbe assolutamente diversa e non imporrebbe condizione alcuna alla natura della superficie. Infatti rappresentando con

$$f(u, v, a, b) = 0$$

l'equazione integrale delle linee geodetiche sulla superficie considerata, e con

$$y = Ax + B$$

quella di una retta del piano, basterebbe stabilire due relazioni fra le A, B, a, b, con che ad ogni geodetica corrisponderebbe una retta e viceversa. Ma è chiaro che in questo modo ad un punto della superficie, considerato come intersezione delle geodetiche uscenti da esso, corrisponderebbe sul piano l'inviluppo delle rette corrispondenti. E soltanto nel caso in cui si prescrivesse che quest'inviluppo dovesse ridursi a un punto, si ricadrebbe sulla quistione trattata precedentemente, e quindi sulle limitazioni ad essa inerenti.

La seconda avvertenza è relativa alla generalizzazione di cui è suscettibile l'enunciato del nostro problema, vale a dire: *riportare i punti di una superficie sopra un'altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.* La soluzione di questo problema più generale non è punto deducibile da quella del caso già considerato, come lo è per es. quando la proprietà caratteristica della corrispondenza è la similitudine delle parti infinitesime o la conservazione dei rapporti d'area. La sola estensione che si può dare legittimamente al nostro teorema è questa: *Affinchè i punti di una superficie possano essere riportati sopra una superficie di curvatura costante, in modo che le linee geodetiche di quella sieno rappresentate da linee geodetiche di questa, è necessario e sufficiente che anche la prima superficie abbia la curvatura costante.*

Pisa, 31 Maggio 1866.

XV.

DI ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI DELLE CURVE ALGEBRICHE.

Giornale di Matematiche, vol. IV (1866), pp. 76-92.

L'argomento trattato in questa Nota è stato oggetto di interessanti ricerche per parte di CHASLES *), di BRETON DE CHAMP **) e di CAUCHY ***) che lo considerò nella sua più ampia generalità e ne trasse importanti teoremi, suscettibili d'applicazione nelle più elevate quistioni della fisica matematica.

Il teorema analitico che costituisce il fondamento di tutte queste ricerche è dovuto a LESLIE, secondo quel che asserisce PIGEON in una Memoria inserita nel « Journal de l'École Polytechnique » †), dove ricorrono considerazioni analoghe. Questo teorema consiste in ciò che la somma dei valori di una funzione intera del seno e del coseno di un arco, relativi ad una certa serie di valori di quest'arco, procedenti in progressione aritmetica, è indipendente dal primo termine di questa serie.

Nella presente Nota ho completato in alcuni punti i risultati dei predetti autori, ne ho accennate alcune applicazioni e ne ho mostrato l'attinenza colla feconda teoria degli invarianti.

---

*) *Aperçu historique et Mémoire de Géométrie...*, Paris 1835-37, pag. 179, 670 ; Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XXVI (1848), pag. 531.

**) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XX (1845), pag. 499 ; t. XXVI (1848), pag. 577, 644.

***) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XXVI (1848), pag. 489, 517, 624, 666.

†) t. XXIV, cahier 41 (1865), pag. 165.

Sia $U(X, Y) = 0$ l'equazione di una curva algebrica di grado n, riferita a coordinate ortogonali X ed Y, e sia

$$u(X, Y) = (a_0, a_1, a_2, \dots a_n)(X, Y)^n$$

il complesso dei termini di grado n nel polinomio U.

Sieno x, y le coordinate di un punto arbitrario del piano, φ l'angolo che una retta uscente da questo punto fa coll'asse delle X, ρ la distanza compresa su questa retta fra il punto stesso ed uno degli n punti d'intersezione colla curva U; X, Y le coordinate di quest'ultimo punto, per modo che si abbia

$$X = x + \rho\cos\varphi, \qquad Y = y + \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione $U = 0$ si ottiene

$$\rho^n . u(\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) + \cdots + U(x, y) = 0\,,$$

equazione in ρ, le cui radici $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ sono gli n segmenti intercettati sulla retta fra il punto (x, y) e la curva U, per cui si avrà

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2 \dots \rho_n} = (-1)^n \frac{u(\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi)}{U(x, y)}\,.$$

Quando la retta gira intorno al punto (x, y), la variazione del prodotto $\frac{1}{\rho_1\rho_2 \dots \rho_n}$ non dipende che da quella dell'espressione $u(\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi)$. Ora se si rappresentano con $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ i valori, compresi fra 0 e π, degli angoli che annullano quest'espressione (i quali sono, come è noto, gli angoli formati coll'asse delle X dagli n asintoti della curva U), si ha

$$\text{(2)} \qquad u(\cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) = (-1)^n \frac{a_0\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_1)\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_2) \dots \mathrm{sen}(\varphi - \varphi_n)}{\mathrm{sen}\,\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 \dots \mathrm{sen}\,\varphi_n}\,.$$

Volendo dunque considerare le variazioni della quantità $\frac{1}{\rho_1\rho_2 \dots \rho_n}$ dipendentemente da quelle di φ, dobbiamo esaminare il numeratore del secondo membro della precedente equazione.

Facendo uso di relazioni notissime si trova successivamente

$$\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{2^0}\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_1)\,,$$

$$\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_1)\,\mathrm{sen}(\varphi - \varphi_2) = \frac{1}{2^1}\Big[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2)\Big]\,,$$

$$\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_3)=\frac{1}{2^2}\Big[\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)+\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_1)$$
$$+\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2)-\operatorname{sen}(3\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)\Big],$$

$$\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_3)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_4)=\frac{1}{2^3}\Big[\cos(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4)$$
$$+\cos(\varphi_1+\varphi_3-\varphi_2-\varphi_4)+\cos(\varphi_1+\varphi_4-\varphi_2-\varphi_3)-\cos(2\varphi+\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4)$$
$$-\cos(2\varphi+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4-\varphi_1)-\cos(2\varphi+\varphi_3-\varphi_4-\varphi_1-\varphi_2)-\cos(2\varphi+\varphi_4-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)$$
$$+\cos(4\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4)\Big],$$

donde si deduce agevolmente la legge generale di composizione dei secondi membri, la quale può esprimersi simbolicamente così:

per n pari

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_2)\ \ldots\ \operatorname{sen}(\varphi-\varphi_n)\\&=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\Big\{\cos[n\varphi-\Phi_n]-S\cos[(n-2)\varphi-\Phi_{n-1}]+S\cos[(n-4)\varphi-\Phi_{n-2}]-\cdots\\&\qquad+(-1)^{\frac{n}{2}}S\cos\Phi_{\frac{n}{2}}\Big\};\end{aligned}\right.$$

per n impari

$$(3')\quad\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_2)\ \ldots\ \operatorname{sen}(\varphi-\varphi_n)\\&=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\Big\{\operatorname{sen}[n\varphi-\Phi_n]-S\operatorname{sen}[(n-2)\varphi-\Phi_{n-1}]+S\operatorname{sen}[(n-4)\varphi-\Phi_{n-2}]-\cdots\\&\qquad+(-1)^{\frac{n-1}{2}}S\operatorname{sen}[\varphi-\Phi_{\frac{n+1}{2}}]\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Ne' secondi membri di queste formole Φ_m rappresenta uno qualunque degli aggregati che si possono formare cogli n angoli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, prendendone m col segno positivo e i rimanenti $n-m$ col segno negativo (cosicchè per esempio $\Phi_n=\varphi_1+\varphi_2\cdots+\varphi_n$); i segni sommatorj S si riferiscono a tutti i valori possibili di questi aggregati. È però da osservare che l'ultima sommatoria della formola (3) deve comprendere solamente quegli aggregati che differiscono fra loro nel valore assoluto, per modo che il numero dei termini contenuti in essa non è $(n)_{\frac{n}{2}}$, ma soltanto $\frac{1}{2}(n)_{\frac{n}{2}}$.

Ciò posto sia p un numero intero positivo; sostituiamo in ambi i membri delle (3), (3') i seguenti valori di φ:

$$\varphi, \quad \varphi+\frac{\pi}{p}, \quad \varphi+\frac{2\pi}{p}, \ldots \varphi+\frac{(p-1)\pi}{p},$$

indi sommiamo i p risultati. Indicando col segno $\sum$ le somme parziali relative a queste sostituzioni nei singoli termini, è chiaro che il secondo membro della (3) fornirà una serie di termini della forma

$$\pm\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\sum_{0}^{p-1}{}_r \cos\left[m\left(\varphi+\frac{r\pi}{p}\right)-\Phi_{\frac{m+n}{2}}\right], \tag{4}$$

dove m può ricevere tutti i valori pari compresi fra o ed n; mentre il secondo membro della (3') porgerà i termini

$$\pm\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\sum_{0}^{p-1}{}_r \operatorname{sen}\left[m\left(\varphi+\frac{r\pi}{p}\right)-\Phi_{\frac{m+n}{2}}\right], \tag{4'}$$

in cui m può avere tutti i valori impari compresi fra 1 ed n. Osserveremo ora che da note formole si ricavano le relazioni

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r \cos\left(\alpha+\frac{rm\pi}{p}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2p}}\cos\left[\alpha+\frac{m(p-1)\pi}{2p}\right], \tag{5}$$

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r \operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{rm\pi}{p}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2p}}\operatorname{sen}\left[\alpha+\frac{m(p-1)\pi}{2p}\right], \tag{5'}$$

nelle quali m è un numero qualunque, non però multiplo intero di $2p$. Quando questo numero è pari, la prima dà

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r \cos\left(\alpha+\frac{rm\pi}{p}\right)=0;$$

e siccome il primo membro di questa formola coincide coll'espressione (4) quando si ponga

$$\alpha=m\varphi-\Phi_{\frac{m+n}{2}},$$

così tutte le somme analoghe alla (4), in cui m non sia un multiplo di $2p$, sono nulle;

e poichè m ha i valori 0, 2, 4, ... n, così se si prende $p > \frac{n}{2}$, saranno tutte nulle ad eccezione di quella che corrisponde ad $m = 0$, la quale ha per valore

$$\frac{p}{2^{n-1}} S \cos \Phi_{\frac{n}{2}},$$

quantità indipendente da φ. Dunque quando n è pari, il valore dell'espressione

$$\frac{1}{p} \sum_{0}^{p-1} {}_r\, u \left[\cos\left(\varphi + \frac{r\pi}{p}\right), \quad \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{r\pi}{p}\right) \right]$$

è dato, vista la (2), da

$$k = \frac{a_0 S \cos \Phi_{\frac{n}{2}}}{2^{n-1} \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \ldots \operatorname{sen} \varphi_n}, \tag{6}$$

e quindi quello della quantità

$$\frac{1}{p} \sum \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n} = \frac{\sum u(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)}{p \,.\, U(x, y)}$$

è indipendente tanto da φ, quanto da p.

Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Se da un punto del piano di una curva algebrica di grado n pari si conduce un fascio di p rette formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, la media aritmetica dei prodotti reciproci dei segmenti intercettati su ciascuna retta fra il punto fisso e la curva, è indipendente dalla direzione del fascio e dal numero p, purchè questo numero sia maggiore di $\frac{n}{2}$.

La reciproca di questa media costante si potrebbe acconciamente denominare *potenza* del punto fisso rispetto alla curva. Indicando con P la potenza del punto (x, y) si avrebbe quindi

$$P = \frac{U(x, y)}{k}. \tag{7}$$

Della quantità k noi conosciamo già l'espressione (6) formata cogli angoli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$: ma essa può essere assegnata in funzione dei soli coefficienti di $u(x, y)$.

Supponiamo infatti che ciascuno dei coseni contenuti nel secondo membro della (3) si trasformi colla solita formola

$$\cos [m\varphi - \Phi_{\frac{m+n}{2}}] = \cos m\varphi \,.\, \cos \Phi_{\frac{m+n}{2}} + \operatorname{sen} m\varphi \,.\, \operatorname{sen} \Phi_{\frac{m+n}{2}}.$$

Ordinando tutti i termini ottenuti in tal modo, è chiaro che si troverà uno sviluppo

della forma

$$u(\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi) = P_0 + P_1\cos\varphi + P_2\cos 2\varphi + \cdots + P_n\cos n\varphi$$
$$+ Q_1\operatorname{sen}\varphi + Q_2\operatorname{sen}2\varphi + \cdots + Q_n\operatorname{sen}n\varphi,$$

dove $P_0 = k$, perchè k non è altro che la parte indipendente da φ nello sviluppo medesimo. Ora questo sviluppo si può ottenere in un altro modo, cioè sostituendo immediatamente nell'espressione

$$a_0\cos^n\varphi + (n)_1 a_1\cos^{n-1}\varphi\operatorname{sen}\varphi + \cdots + a_n\operatorname{sen}^n\varphi$$

i noti sviluppi parziali di $\cos^m\varphi$, $\operatorname{sen}^m\varphi$ ($m = 2, 3, \ldots n$), formati coi seni e coseni dei multipli di φ. Basterà dunque, per avere k, trovare la parte indipendente da φ nel risultato di questa sostituzione.

Per tal uopo ricorriamo alle formole

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}, \qquad 2i\operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi},$$

dalle quali si trae

$$2^{n-r}\cos^{n-r}\varphi = \sum_0^{n-r}{}_p (n-r)_p e^{i(n-r-2p)\varphi},$$

$$2^r(-1)^{\frac{r}{2}}\operatorname{sen}^r\varphi = \sum_0^{r}{}_q (-1)^q (r)_q e^{i(r-2q)\varphi},$$

e quindi

$$\cos^{n-r}\varphi\operatorname{sen}^r\varphi = \frac{1}{2^n(-1)^{\frac{r}{2}}}\sum_0^{n-r}{}_p\sum_0^{r}{}_q (-1)^q (n-r)_p (r)_q e^{i[n-2(p+q)]\varphi}.$$

Per ottenere la parte indipendente da φ basta tener conto di quei soli termini in cui $2p + 2q = n$, il che suppone primieramente che n sia pari, altrimenti tali termini mancherebbero. Si vede inoltre che anche r deve essere pari, senza di che la parte costante risulterebbe immaginaria, e quindi dovrebbe essere identicamente nulla. Ammesso dunque che n ed r sieno pari, ponendo $r = 2s$, e rappresentando con k_s la somma dei termini costanti nello sviluppo di $\cos^{n-2s}\varphi\operatorname{sen}^{2s}\varphi$, avremo

$$k_s = \frac{(-1)^s}{2^n}\sum_0^{2s}{}_q (-1)^q (n-2s)_{\frac{n}{2}-q}(2s)_q.$$

Bisogna però osservare che in questa formola si è supposto $2s \leqq \frac{n}{2}$; se fosse $2s > \frac{n}{2}$ bisognerebbe considerare soltanto i termini in cui l'indice $\frac{n}{2} - q$ è compreso

fra o ed $n-2s$, e quindi sostituire ai limiti o e $2s$ i limiti $2s-\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}$. Ma basta esaminare il caso di $2s \leqq \frac{n}{2}$, perchè, mutando nella primitiva eguaglianza φ in $\frac{\pi}{2}-\varphi$ si vede che $k_s = k_{\frac{n}{2}-s}$.

Il precedente valore di k_s può ridursi ad una forma semplicissima. Infatti si può scrivere

$$k_s(n)_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^n} \sum_0^{2s} {}_q (-1)^q (n)_{2s} (n-2s)_{\frac{n}{2}-q} (2s)_q :$$

ma è chiaro che

$$(n)_{2s}(n-2s)_{\frac{n}{2}-q}(2s)_q = (n)_{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)_q \left(\frac{n}{2}\right)_{2s-q}, \tag{8}$$

dunque

$$k_s(n)_{2s} = \frac{(-1)^s (n)_{\frac{n}{2}}}{2^n} \sum_0^{2s} {}_q (-1)^q \left(\frac{n}{2}\right)_q \left(\frac{n}{2}\right)_{2s-q}.$$

Ora se si moltiplicano insieme le due equazioni

$$(1-x)^{\frac{n}{2}} = \sum_0^{\frac{n}{2}} {}_q (-1)^q \left(\frac{n}{2}\right)_q x^q, \qquad (1+x)^{\frac{n}{2}} = \sum_0^{\frac{n}{2}} {}_p \left(\frac{n}{2}\right)_p x^p,$$

si vede subito che il coefficiente di x^{2s} nel prodotto dei secondi membri è

$$\sum_0^{2s} {}_q (-1)^q \left(\frac{n}{2}\right)_q \left(\frac{n}{2}\right)_{2s-q},$$

mentre il prodotto dei primi membri, cioè $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$, contiene x^{2s} col coefficiente $(-1)^s\left(\frac{n}{2}\right)_s$; dunque

$$\sum_0^{2s} {}_q (-1)^q \left(\frac{n}{2}\right)_q \left(\frac{n}{2}\right)_{2s-q} = (-1)^s \left(\frac{n}{2}\right)_s,$$

epperò

$$k_s(n)_{2s} = \frac{(n)_{\frac{n}{2}}}{2^n} \left(\frac{n}{2}\right)_s.$$

Sostituendo finalmente nell'espressione $u(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ il valore trovato per k_s in luogo di $\cos^{n-2s}\varphi . \operatorname{sen}^{2s}\varphi$, ed omettendo tutti i termini di posto pari, si trova

$$k = \frac{(n)_{\frac{n}{2}}}{2^n} \sum_0^{\frac{n}{2}} {}_s \left(\frac{n}{2}\right)_s a_{2s}, \tag{9}$$

$$k = \frac{(n)_{\frac{n}{2}}}{2^n}\left[a_0 + a_n + \left(\frac{n}{2}\right)_1 (a_2 + a_{n-2}) + \left(\frac{n}{2}\right)_2 (a_4 + a_{n-4}) + \cdots\right].$$

Applicando le cose esposte alle linee di 2° ordine, si ha primieramente il teorema seguente:

La media aritmetica dei prodotti reciproci dei segmenti che una linea di 2° ordine intercetta sopra p rette divergenti da un punto fisso e formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, *è indipendente dalla direzione del fascio e dal numero p, purchè quest'ultimo non sia minore di* 2. (È un caso particolarissimo di questo teorema la nota invariabilità della somma dei quadrati inversi di due diametri perpendicolari).

Per calcolare il valore di k poniamo

$$U = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2 + 2 b_0 x + 2 b_1 y + c_0 ,$$

ed avremo dalla (9), per $n = 2$,

$$k = \frac{a_0 + a_2}{2} ,$$

quindi dalla (7)

$$P = \frac{2 U(x, y)}{a_0 + a_2} .$$

Da questa formola si scorge che il luogo dei punti in cui P ha un valore costante ed individuato, è una seconda conica, concentrica ed omotetica alla prima.

Quando $a_0 + a_2 = 0$, cioè quando la conica è un'iperbole equilatera, la potenza P è infinita in ogni punto del piano (purchè non appartenente alla curva), laonde per questa particolar specie di coniche ha luogo la proprietà che *la somma dei prodotti reciproci dei segmenti determinati su p rette divergenti da un punto fisso sotto angoli uguali a* $\frac{\pi}{p}$ *è sempre nulla, purchè sia* $p > 1$.

Per una seconda conica

$$U' = a'_0 x^2 + 2 a'_1 x y + a'_2 y^2 + 2 b'_0 x + 2 b'_1 y + c'_0 ,$$

si ha parimenti

$$P' = \frac{2 U'(x, y)}{a'_0 + a'_2} ,$$

e la curva luogo dei punti d'egual potenza rispetto alle due coniche è

$$(a_0 + a_2)\, U' - (a'_0 + a'_2)\, U = 0 ,$$

altra conica passante per i punti comuni alle due prime. Sviluppando quest'equazione

si trova

$$(a_0 a_2' - a_2 a_0')(x^2 - y^2) - 2(a_0 a_1' - a_1 a_0' - a_1 a_2' + a_2 a_1')xy + \cdots = 0,$$

donde risulta che la conica luogo dei punti d'egual potenza rispetto a due coniche date è sempre un'iperbole equilatera. Bisogna escludere naturalmente il caso in cui le coniche date sieno ambedue iperbole equilatere, giacchè ogni punto del piano sarebbe d'egual potenza.

Affinchè l'equazione precedente diventi lineare in x, y, è necessario e sufficiente che sussistano le due relazioni

$$\frac{a_0'}{a_0} = \frac{a_1'}{a_1} = \frac{a_2'}{a_2},$$

cioè che le due coniche sieno omotetiche, ed in questo caso alla retta che congiunge i due punti (reali od immaginarj) in cui esse s'incontrano a distanza finita, fa d'uopo associare la retta all'infinito.

Quando le due coniche sono circonferenze, esse sono per ciò stesso necessariamente omotetiche, epperò la linea dei punti d'egual potenza è sempre una retta, come è noto dalla geometria elementare.

Date tre coniche, è evidente che le tre iperbole equilatere rappresentanti i luoghi dei punti d'egual potenza rispetto a ciascuna delle tre coppie che si possono formare con quelle, hanno in comune i medesimi quattro punti. A ciascuna terna di coniche corrisponde dunque un sistema di quattro punti aventi la stessa potenza rispetto a ciascuna delle coniche e dotati della proprietà che per essi passano tre e quindi infinite iperbole equilatere. Questi punti sono dati dalle due equazioni

$$\frac{U}{a_0 + a_2} = \frac{U'}{a_0' + a_2'} = \frac{U''}{a_0'' + a_2''}.$$

Quando le tre coniche sono omotetiche, uno solo di questi punti è situato a distanza finita.

Ponendo il punto fisso (x, y) nel centro di una conica

$$a_0 x^2 + a_2 y^2 = 1,$$

si ha il seguente teorema (che per $p = 2$ riducesi al già rammentato): *la media dei quadrati reciproci di p semidiametri inclinati fra loro di un angolo uguale a $\frac{\pi}{p}$ è indipendente dal numero p $\left(\text{ed uguale ad } \frac{a_0 + a_2}{2}\right)$, purchè questo numero sia maggiore di* 1.

Le considerazioni istituite da principio per dimostrare il teorema generale non si possono applicare immediatamente alle curve di grado impari, per le quali nelle som-

me (4') il numero m è impari, donde risulta che il secondo membro della (5') non può mai essere zero indipendentemente da α.

È facile rendersi ragione a *priori* della differenza che passa, sotto questo punto di vista, fra le curve di grado pari e quelle di grado impari. Abbiasi infatti un fascio di p rette divergenti da un punto fisso, in modo che le direzioni dei segmenti positivi contati sovr'esse dal punto stesso formino angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$. In tale stato di cose i prodotti reciproci dei segmenti determinati su queste p rette avranno valori determinati, che indicheremo per un momento con $h_1, h_2, \ldots h_p$. Supponiamo ora che questo fascio venga ruotato di un angolo uguale ad $\frac{r\pi}{p}$, cosicchè la retta che in esso era contata come 1ª, passi ad occupare il posto della r-esima. In tal caso è chiaro che le prime $p-r+1$ rette del secondo fascio concideranno colle ultime $p-r+1$ del primo, tanto rispetto alla direzione assoluta che rispetto al senso dei segmenti positivi: ma le ultime $r-1$ rette del 2° fascio, sovrapponendosi alle prime $r-1$ del 1°, avranno i loro segmenti positivi contati in senso contrario, cosicchè i prodotti reciproci relativi ad esse saranno

$$(-1)^n h_1, \qquad (-1)^n h_2, \qquad \ldots \qquad (-1)^n h_{r-1}.$$

Quando dunque n è impari, questi prodotti cambiano segno, e la somma $\sum h$ può assumere in generale $2p$ valori differenti (a due a due eguali e di segno contrario), secondo che si assume come direzione iniziale del fascio l'una o l'altra delle $2p$ direzioni considerate. È chiaro dunque che la media $\frac{1}{p}\sum h$ non può rimanere costante quando la curva è di grado impari.

D'altra parte se si considerassero invece p direzioni formanti angoli uguali a $\frac{2\pi}{p}$, si vedrebbe analogamente, facendo ruotare il fascio per una mezza circonferenza, che tutti i prodotti reciproci mutano segno, laonde non potrebbe la loro somma rimaner costante a meno che non fosse costantemente nulla. Questo è ciò che appunto accade; come si verifica ponendo 2π in luogo di π nella (5'), nel qual caso la somma

$$\sum_{0}^{p-1}{}_r \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2mr\pi}{p}\right)$$

è sempre nulla, qualunque sia m, del pari che l'analoga somma formata coi coseni.

Ciò nondimeno si può trar partito dal teorema trovato per le curve di grado pari, per ricavarne uno dello stesso genere rispetto a quelle del grado impari.

Infatti se $U(X, Y)$ è un polinomio di grado impari n, l'equazione

$$[U(X, Y)]^2 = 0$$

si deve considerare come rappresentante una curva di grado pari $2n$, che risulta dal

complesso di due curve coincidenti del grado impari n. Si può quindi applicare a questa curva doppia il primo teorema, osservando che siccome ciascun punto della curva $U = 0$ viene in tal modo a considerarsi due volte, così tutti i prodotti di segmenti determinati da questa curva devono essere innalzati al quadrato. Si ottiene così il seguente teorema, valevole per le curve di ogni grado:

Se da un punto nel piano di una curva algebrica di grado n si conduce un fascio di p rette formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, la media dei prodotti reciproci e quadrati dei segmenti intercettati su queste rette fra il punto e la curva è indipendente dalla direzione del fascio e dal numero p, purchè questo numero sia maggiore di n.

Volendo far uso di questo teorema per avere una definizione della *potenza* quando la curva è di grado impari, sembrerebbe conveniente rappresentare l'anzidetta media con $\frac{1}{P^2}$, chiamando P la potenza, cosicchè si avrebbe

$$P^2 = \frac{[U(x, y)]^2}{k}. \tag{10}$$

Per formare il valore di k si supporrà

$$[(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n]^2 = (A_0, A_1, A_2, \ldots A_{2n})(x, y)^{2n},$$

e si avrà

$$k = \frac{(2n)_n}{2^{2n}} \sum_0^n {}_s (n)_s A_{2s}. \tag{11}$$

Bisogna però notare che il valore di P ottenuto in tal guisa non coincide punto, quando n è pari, con quello che si ricava dalla prima definizione.

Il luogo dei punti d'egual potenza per due curve di grado impari U ed U' è la curva

$$k U'^2 - k' U^2 = 0,$$

che si decompone nelle due

$$U' \sqrt{k} \pm U \sqrt{k'} = 0,$$

passanti entrambe pei punti comuni alle due date.

Applicando l'ultimo teorema al caso della retta, si ottiene un teorema particolare il quale, nel caso di $p = 2$, non è che una semplicissima trasformazione di quello di PITAGORA, e che è compreso alla sua volta in un altro che daremo fra poco. Supponendo

$$U = a_0 x + a_1 y + b_0,$$

si trova

$$A_0 = a_0^2, \qquad A_1 = a_0 a_1, \qquad A_2 = a_1^2, \qquad k = \frac{a_0^2 + a_1^2}{2},$$

e la (10) dà

$$P = \pm \frac{(a_0 x + a_1 y + b_0)\sqrt{2}}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}},$$

laonde la potenza di un punto rapporto ad una retta viene per tal guisa ad essere definita come la distanza dal punto alla retta moltiplicata per $\sqrt{2}$.

Il luogo dei punti d'egual potenza rispetto a due rette è il sistema delle due bisettrici dell'angolo formato da esse, ecc.

L'osservazione che ci ha servito per estendere il teorema primitivo alle curve di grado impari, può essere applicata con maggiore generalità, innalzando il polinomio $U(X, Y)$ ad una potenza intiera e positiva m, la quale deve però essere pari quando n è impari. Operando in tal modo e rammentando l'avvertenza già usata, si ottiene il teorema seguente (il quale del resto, come il precedente, è implicitamente compreso in quello enunciato per le curve di grado pari, giacchè nulla impedisce di considerare una di queste curve come costituita dal complesso di più altre curve di grado inferiore, alcune delle quali, od anche tutte, possono coincidere fra loro, purchè la somma dei singoli loro gradi sia un numero pari):

Se da un punto nel piano di una curva di grado n si conduce un fascio di p rette formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, la media delle potenze m-esime dei prodotti reciproci dei segmenti intercettati su ciascuna di esse fra il punto e la curva, è indipendente dalla direzione del fascio e dal numero p, purchè questo numero sia maggiore di $\frac{nm}{2}$, ed m sia pari quando n è impari.

Applicando questo teorema alla retta $Y - a = 0$ e ponendo l'origine nel punto fisso, si trova semplicemente

$$k = \frac{(2m)_m}{2^{2m}},$$

donde si conclude che:

La media delle potenze reciproche $2m$-esime dei segmenti determinati da una retta fissa sopra un fascio di p rette divergenti da un punto fisso e formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, ha per valore

$$\frac{(2m)_m}{(2a)^{2m}},$$

purchè sia $p > m$ (a è la distanza dal punto alla retta).

Se invece si considera una conica e si pone il punto fisso nel suo centro, si ha il seguente teorema:

La media delle potenze reciproche $2m$-esime di p semidiametri formanti fra loro angoli uguali a $\frac{\pi}{p}$, è indipendente dal numero p, purchè sia $p > m$.

Per calcolare il valore costante di questa media sia

$$a_0 x^2 + a_2 y^2 = 1$$

l'equazione della conica. Ponendo

$$(A_0, A_1, \dots A_{2m})(x, y)^{2m} = (a_0 x^2 + a_2 y^2)^m = \sum_0^m {}_s (m)_s a_0^{m-s} a_2^s x^{2m-2s} y^{2s},$$

si trova

$$A_{2s} = \frac{(m)_s}{(2m)_{2s}} a_0^{m-s} a_2^s, \qquad A_{2s+1} = 0,$$

quindi

$$k = \frac{(2m)_m}{2^{2m}} \sum_0^m {}_s \frac{(m)_s^2}{(2m)_{2s}} a_0^{m-s} a_2^s,$$

ossia per la (8),

$$k = \frac{1}{2^{2m}} \sum_0^m {}_s (2s)_s (2m-2s)_{m-s} a_0^{m-s} a_2^s.$$

Da questa formola si deducono i valori seguenti:

per $m = 1$, $\qquad k = \frac{1}{2}(a_0 + a_2)$,

$m = 2$, $\qquad k = \frac{1}{8}\left[3(a_0^2 + a_2^2) + 2a_0 a_2\right]$,

$m = 3$, $\qquad k = \frac{1}{16}\left[5(a_0^2 + a_2^2) - 2a_0 a_2\right](a_0 + a_2)$,

$m = 4$, $\qquad k = \frac{1}{128}\left[35(a_0^4 + a_2^4) + 20 a_0 a_2 (a_0^2 + a_2^2) + 18 a_0^2 a_2^2\right]$,

$m = 5$, $\qquad k = \frac{1}{256}\left[63(a_0^4 + a_2^4) - 28 a_0 a_2 (a_0^2 + a_2^2) + 58 a_0^2 a_2^2\right](a_0 + a_2)$,

ecc. $\qquad$ ecc.

È facile vedere che per tutti i valori impari di m, k contiene il fattore $a_0 + a_2$, e quindi si annulla quando $a_0 + a_2 = 0$, cioè quando la conica è un'iperbole equilatera. Abbiamo così per queste curve la proprietà seguente, che ne comprende una già enunciata precedentemente: *la somma delle potenze reciproche di grado impari m dei prodotti dei segmenti determinati da un'iperbole equilatera sopra p rette divergenti da un punto fisso sotto angoli uguali a* $\frac{\pi}{p}$, *è sempre nulla qualunque sia questo punto, purchè sia* $p > m$.

Per la circonferenza $a_0(x^2 + y^2) = 1$ si sa a priori che deve risultare $k = a_0^m$. Se ne conclude la relazione

$$\sum_0^m {}_s (2s)_s (2m - 2s)_{m-s} = 2^{2m},$$

$$\sum_0^m {}_s \frac{(m)_s^2}{(2m)_{2s}} = \frac{2^{2m}}{(2m)_m}.$$

È facile mettere in rapporto i risultati precedenti colla teoria degli invarianti.

Siccome l'origine degli assi può essere situata in un punto qualunque del piano, così ponendola nel punto fisso ed ammettendo che il termine costante nel polinomio U sia l'unità (ciò che è sempre lecito, dovendo il punto fisso essere preso fuori della curva), si ha dalla (7)

$$k = \frac{1}{P}.$$

Ora la potenza P, in virtù del teorema generale, rimane inalterata quando si fa ruotare la curva nel proprio piano intorno all'origine come centro: dunque la quantità k, che sappiamo essere una funzione lineare dei coefficienti di U, deve rimanere invariata quando si trasformino le variabili x, y con una sostituzione della forma

$$x = \quad x' \cos\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha,$$

$$y = -x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha,$$

cioè con una sostituzione ortogonale; vale a dire che formando l'espressione k coi coefficienti della forma binaria u, trasformata dalle formole precedenti, si deve riprodurre identicamente l'espressione primitiva, mediante la spontanea eliminazione dell'angolo α.

Per dedurre la forma di k dalla considerazione degli invarianti, supponiamo n pari ed uguale a $2m$, e prendiamo la forma binaria

$$(13) \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2m})(x, y)^{2m} + t(x^2 + y^2)^m,$$

dove t è una indeterminata. Sia T un invariante di questa funzione, e quindi un'espressione della forma

$$T = T_0 + t T_1 + t^2 T_2 + \cdots,$$

dove T_0, T_1, T_2, ... sono funzioni intere dei soli coefficienti a_0, a_1, a_2, ... a_{2m}. Quando le variabili x, y vengono trasformate ortogonalmente, il binomio $x^2 + y^2$ si trasforma in sè stesso, quindi la quantità t non è alterata dalla sostituzione: invece i

coefficienti $a_0, a_1, \ldots a_{2m}$ assumono altri valori. Poichè dunque T deve avere, per ipotesi, lo stesso valore prima e dopo la sostituzione, e ciò qualunque sia t, è evidente che tale proprietà deve competere, rispetto alla medesima sostituzione (ortogonale), a ciascuna delle espressioni $T_0, T_1, T_2, \ldots$ le quali sono perciò altrettante funzioni dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ invariabili per ogni sostituzione ortogonale *).

Ciò premesso, rammentiamo che ogni forma binaria di grado pari

$$(a_0, a_1, \ldots a_{2m})(x, y)^{2m}$$

possiede un invariante quadratico, la cui espressione in funzione dei coefficienti è

$$a_0 a_{2m} - (2m)_1 a_1 a_{2m-1} + (2m)_2 a_2 a_{2m-2} - \cdots + (-1)^m \tfrac{1}{2}(2m)_m a_m^2,$$

e che, espresso invece in funzione delle radici dell'equazione

$$(a_0, a_1, \ldots a_{2m})(x, 1)^{2m} = 0,$$

equivale, salvo un fattore costante, alla funzione simmetrica

$$S(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 \ldots (x_{2m-1} - x_{2m})^2.$$

Per formare l'analogo invariante, relativo alla forma (13), basta osservare che in questa i coefficienti di posto pari sono gli stessi $a_1, a_3, \ldots a_{2m-1}$ della forma primitiva; mentre i coefficienti di posto impari si ottengono mutando a_{2s} in

$$a_{2s} + \frac{t(m)_s}{(2m)_{2s}}. \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Dunque l'invariante quadratico della (13) sarà:

per m pari

$$\sum_0^{\frac{m}{2}-1}{}_s (2m)_{2s}\left[a_{2s} + \frac{t(m)_s}{(2m)_{2s}}\right]\left[a_{2m-2s} + \frac{t(m)_s}{(2m)_{2s}}\right] + \frac{1}{2}(2m)_m\left[a_m + \frac{t(m)_{\frac{m}{2}}}{(2m)_m}\right]^2$$
$$- [(2m)_1 a_1 a_{2m-1} + (2m)_3 a_3 a_{2m-3} + \cdots + (2m)_{m-1} a_{m-1} a_{m+1}],$$

*) Questo ragionamento non differisce da quello che serve nella ricerca degli invarianti simultanei di due forme binarie, che nel nostro caso sono la $u(x, y)$ e la $x^2 + y^2$. È evidente la ragione di questa coincidenza.

per m impari

$$\sum_0^{\frac{m-1}{2}} {}^s (2m)_{2s} \left[a_{2s} + \frac{t(m)_s}{(2m)_{2s}}\right]\left[a_{2m-2s} + \frac{t(m)_s}{(2m)_{2s}}\right]$$

$$-\left[(2m)_1 a_1 a_{2m-1} + (2m)_3 a_3 a_{2m-3} + \cdots + \tfrac{1}{2}(2m)_m a_m^2\right];$$

ovvero, ordinando rispetto a t,

per m pari

$$T_0 + t\left[\sum_0^{\frac{m}{2}-1} {}^s (m)_s (a_{2s} + a_{2m-2s}) + (m)_{\frac{m}{2}} a_m\right] + t^2\left[\sum_0^{\frac{m}{2}-1} {}^s \frac{(m)_s^2}{(2m)_{2s}} + \frac{1}{2}\frac{(m)_{\frac{m}{2}}^2}{(2m)_m}\right],$$

per m impari

$$T_0 + t\sum_0^{\frac{m-1}{2}} {}^s (m)_s (a_{2s} + a_{2m-2s}) + t^2 \sum_0^{\frac{m-1}{2}} {}^s \frac{(m)_s^2}{(2m)_{2s}}.$$

Queste formole si possono concentrare nell'unica seguente, sussistente per ogni valore di m,

$$T_0 + t\sum_0^m {}^s (m)_s a_{2s} + \frac{t^2}{2}\sum_0^m {}^s \frac{(m)_s^2}{(2m)_{2s}},$$

ossia, per la (12),

$$T_0 + t\sum_0^m {}^s (m)_s a_{2s} + \frac{2^{2m-1}}{(2m)_m} t^2.$$

Applicando il ragionamento precedente ai coefficienti di t, t^2, dei quali soltanto il primo è funzione dei coefficienti, si trova che l'espressione

$$\sum_0^m {}^s (m)_s a_{2s}$$

è dotata della proprietà di rimanere invariabile per ogni sostituzione ortogonale operata sulla forma $u(x, y)$. Si riconosce di più ch'essa non differisce che pel fattore costante $\frac{(2m)_m}{2^{2m}}$ dall'espressione che si è precedentemente designata con k.

Le proprietà di cui ci siamo occupati, considerate nel loro aspetto geometrico, sono suscettibili di essere trasformate coi soliti metodi della geometria moderna; in particolare con quello delle polari reciproche. Su tal proposito ci limiteremo a notare che alcuni dei teoremi dati dallo CHASLES nei luoghi citati, si possono dimostrare per questa via. Allo stesso scopo si giungerebbe usando altri sistemi di coordinate, p. es. le tangenziali di PLÜCKER.

XVI.

DIMOSTRAZIONE DI DUE FORMOLE DEL SIG. BONNET.

Giornale di Matematiche, vol. IV (1866), pp. 123-127.

Il sig. O. BONNET ha fatto recentemente conoscere *) due eleganti ed utilissime formole, relative alla teoria delle linee tracciate sopra una superficie. Mi propongo di darne quì una breve dimostrazione.

Sia

$$(1)\qquad z = \tfrac{1}{2}(a_0 x^2 + a_1 y^2) + \tfrac{1}{6}(b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3 y^3) + \cdots$$

l'equazione di una superficie, riferita a tre assi passanti per un punto O della superficie medesima e diretti secondo la normale, e le tangenti alle due linee di curvatura che si intersecano in quel punto.

Chiamando R_1 ed R_2 i raggi principali di curvatura, relativi ad un punto pochissimo discosto da O, si trovano facilmente, per mezzo della nota equazione di 2° grado, i valori seguenti:

$$\frac{1}{R_1} = a_0 + b_0 x + b_1 y + \cdots, \qquad \frac{1}{R_2} = a_1 + b_2 x + b_3 y + \cdots,$$

dai quali si ricavano non solo le notissime formole

$$(2)\qquad a_0 = \left(\frac{1}{R_1}\right)_0, \qquad a_1 = \left(\frac{1}{R_2}\right)_0,$$

*) Nouvelles Annales de Mathématiques (deuxième série), t. IV (1865), pag. 267.

ma altresì le seguenti

$$(2') \quad b_0 = \left(\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial x}\right)_0, \quad b_1 = \left(\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial y}\right)_0, \quad b_2 = \left(\frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial x}\right)_0, \quad b_3 = \left(\frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial y}\right)_0,$$

suscettibili di molte applicazioni. L'indice o esprime che le quantità a cui è apposto si riferiscono al punto O, cioè al punto $x = 0$, $y = 0$.

L'equazione differenziale delle linee asintotiche

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

nel caso nostro dà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \pm\sqrt{\frac{a_0}{-a_1}},$$

e, derivata nuovamente,

$$b_0 + 3b_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 3b_2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2 + b_3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^3 + 2a_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

ossia

$$\frac{a_1 b_0 - 3a_0 b_2}{a_1} \pm \frac{3a_1 b_1 - a_0 b_3}{a_1}\sqrt{\frac{a_0}{-a_1}} \pm 2\sqrt{-a_0 a_1}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = 0.$$

Queste formole non sono reali che quando a_0 ed a_1 hanno segno contrario: per fissare le idee supporremo $a_0 > 0$, $a_1 < 0$.

Ciò posto rammentiamo che il raggio di curvatura di una linea nello spazio è eguale a quello della curva piana, projezione di essa sul piano osculatore nel punto considerato. Chiamando quindi ρ_0 il raggio di curvatura dell'asintotica nel punto O, si avrà

$$\rho_0 = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0},$$

e quindi, pei valori precedenti,

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm\frac{(a_1 b_0 - 3a_0 b_2)\sqrt{-a_1} \pm (a_0 b_3 - 3a_1 b_1)\sqrt{a_0}}{2(a_0 - a_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-a_0 a_1}}.$$

Per le (2), (2') si ha

$$a_1 b_0 - 3a_0 b_2 = \left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial x} - \frac{3}{R_1}\frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{R_2^2}{R_1^2}\cdot\frac{\partial \frac{R_1}{-R_2^3}}{\partial x}\right)_0,$$

$$a_0 b_3 - 3 a_1 b_1 = \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \frac{1}{R_2}}{\partial y} - \frac{3}{R_2} \frac{\partial \frac{1}{R_1}}{\partial y} \right)_0 = \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\partial \frac{-R_2}{R_1^3}}{\partial y} \right)_0 ,$$

ovvero

$$a_1 b_0 - 3 a_0 b_2 = \frac{a_0^2}{a_1^2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \right)_0 , \qquad a_0 b_3 - 3 a_1 b_1 = \frac{a_1^2}{a_0^2} \left(\frac{\partial H_2}{\partial y} \right)_0 ,$$

ponendo per semplicità

$$H_1 = \frac{R_1}{-R_2^3} , \qquad H_2 = \frac{-R_2}{R_1^3} ,$$

donde

$$a_0 = (H_1 H_2^3)_0^{\frac{1}{8}} , \qquad a_1 = -(H_1^3 H_2)_0^{\frac{1}{8}} .$$

Sostituendo si trova

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{\left(\frac{H_2}{H_1}\right)_0^{\frac{1}{2}} (H_1^3 H_2)_0^{\frac{1}{16}} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \right)_0 \pm \left(\frac{H_1}{H_2}\right)_0^{\frac{1}{2}} (H_1 H_2^3)_0^{\frac{1}{16}} \left(\frac{\partial H_2}{\partial y} \right)_0}{2 (H_1 H_2)_0 (R_1 - R_2)_0^{\frac{3}{2}}} ,$$

equazione che si trasforma facilmente in quest'altra

$$\frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{4(-R_1 R_2)_0^{\frac{7}{8}}}{(R_1 - R_2)_0^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\frac{\partial H_1^{\frac{1}{8}}}{\partial x} \right)_0 \pm \left(\frac{\partial H_2^{\frac{1}{8}}}{\partial y} \right)_0 \right] .$$

Ora è chiaro che chiamando s_1, s_2 gli archi delle linee di curvatura corrispondenti ai raggi R_1, R_2 nel punto O, si ha

$$dx = \delta s_1 , \qquad dy = \delta s_2 .$$

Riponendo dunque per H_1, H_2 i loro valori, si può scrivere la formola precedente nel modo che segue:

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{4(-R_1 R_2)_0^{\frac{7}{8}}}{(R_1 - R_2)_0^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\delta \left(\frac{R_1}{-R_2^3} \right)^{\frac{1}{8}}}{\delta s_1} \pm \frac{\delta \left(\frac{-R_2}{R_1^3} \right)^{\frac{1}{8}}}{\delta s_2} \right] ,$$

dove $\delta \left(\frac{R_1}{-R_2^3} \right)$ indica l'accrescimento che riceve la quantità $\frac{R_1}{-R_2^3}$, quando si percorre sulla linea s_1 l'arco δs_1, partendo dal punto O, etc.

La formola precedente è una di quelle di cui devesi la scoperta al sig. BONNET. Da essa egli ha dedotto l'immediata dimostrazione dell'importante teorema di LAMÉ sul sistema triplo di superficie ortogonali ed isoterme.

Nell'altra formola, oltre il raggio ρ_0, entrano i raggi di curvatura e di torsione ρ ed r di una linea tracciata sulla superficie ed avente, nel punto al quale corrisponde il valore ρ_0, il piano osculatore tangente alla superficie medesima. È facile riconoscere che, in tali circostanze, la linea considerata è tangente in quel punto ad una delle asintotiche.

Per istabilire questa seconda formola, incominceremo col supporre che, mediante una opportuna rotazione degli assi Ox, Oy nel loro piano, si sia trasformata la (1) nella seguente:

$$(1') \qquad z = c_0 xy + \tfrac{1}{2} c_1 y^2 + \tfrac{1}{6}(d_0 x^3 + 3 d_1 x^2 y + 3 d_2 x y^2 + d_3 y^3) + \cdots,$$

per modo che l'asse delle x sia tangente ad una delle asintotiche. Procedendo come si è fatto pocanzi si trova, per questa asintotica,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = -\frac{d_0}{2c_0},$$

e quindi

$$\rho_0 = -\frac{2c_0}{d_0}.$$

Ma si ha facilmente

$$c_0 = \frac{1}{(\sqrt{-R_1 R_2})_0},$$

quindi

$$d_0 = -\frac{2}{\rho_0 (\sqrt{-R_1 R_2})_0}.$$

Ciò posto osserviamo che, estendendo alle linee dello spazio il processo esposto per le linee piane nei §§ 516-517 del Trattato di Calcolo differenziale del sig. BERTRAND, si ha facilmente, nei punti vicini all'origine,

$$x = s + \cdots, \qquad y = \frac{s^2}{2\rho} + \cdots, \qquad z = \frac{s^3}{6r\rho} + \cdots,$$

dove ρ, r esprimono i raggi di curvatura e di torsione nel punto O, s l'arco contato da questo punto, e si suppone che Ox sia tangente alla curva nel punto O, mentre il piano xy coincide col piano osculatore nel medesimo punto. Se questa curva deve esistere interamente sulla superficie (1'), la sostituzione dei valori precedenti deve dare un risultato identico, qualunque sia s. Ora il confronto dei termini in s^3 dà

$$1 = 3c_0 r + d_0 r \rho,$$

e, sostituendo i precedenti valori di c_0 e d_0,

$$(\sqrt{-R_1 R_2})_0 = r\left(3 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right);$$

se ne ricava

(4)
$$\rho = \frac{\rho_0}{2}\left[3 - \frac{(\sqrt{-R_1 R_2})_0}{r}\right].$$

Tale è la seconda formola dovuta al sig. BONNET.

Nel caso in cui la linea considerata sia uno dei rami della curva che nasce dalla intersezione di una superficie con uno dei propri piani tangenti, si ha $\frac{1}{r} = 0$ e quindi $\rho = \frac{3}{2}\rho_0$. È questo il teorema che, essendo stato da me pubblicato nei « Nouvelles Annales » *), ha dato occasione al sig. BONNET di far conoscere le formole delle quali si trovava in possesso.

Dall'equazione (4) si potrebbero dedurre moltissime conseguenze interessanti. Mi limiterò alla seguente. Per $\rho = \rho_0$ si ha

$$r_0 = (\sqrt{-R_1 R_2})_0,$$

risultato il quale c'insegna che i raggi di torsione di due asintotiche sono, nel punto ad esse comune, eguali fra loro ed alla media geometrica dei raggi di curvatura (considerati nel loro valore assoluto). Dunque se la superficie è flessibile ed inestendibile, la torsione delle sue linee asintotiche si mantiene costante in ogni trasformazione.

Si deve considerare come caso particolare della formola $r_0 = (\sqrt{-R_1 R_2})_0$ un teorema già dato precedentemente dal sig. BONNET e riportato dal sig. BERTRAND nel § 655 del citato suo Trattato.

*) Deuxième série, t. IV (1865), pag. 258; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 255.

XVII.

DI UNA PROPRIETÀ DELLE LINEE A DOPPIA CURVATURA.

Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pp. 21-23.

Sia s l'arco di una linea a doppia curvatura, contato da un'origine arbitraria e terminato al punto m; sia M un punto qualunque dello spazio. Le coordinate dei punti m, M rispetto a tre assi ortogonali sieno rispettivamente x, y, z; X, Y, Z.

Consideriamo il sistema d'assi, pure ortogonali, $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ aventi l'origine nel punto m della linea considerata e diretti rispettivamente secondo la *tangente*, la *normale primaria* e la *normale secondaria* *) della linea stessa nel punto m. Il primo di questi assi deve essere diretto dalla parte verso cui cresce s, il secondo dalla parte del centro di curvatura, il terzo dev'essere disposto, rispetto al primo ed al secondo, come l'asse z lo è rispetto a quelli delle x e delle y.

Chiamando a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 i coseni degli angoli che il nuovo sistema d'assi forma col sistema primitivo, e ξ, η, ζ le coordinate del punto M nel nuovo sistema, si hanno le formole

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= x + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta,\\ Y &= y + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta,\\ Z &= z + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta,\end{aligned}\right.$$

*) Con queste due ultime denominazioni vogliamo indicare le due normali condotte per m, l'una nel piano osculatore, l'altra perpendicolarmente a questo piano.

nelle quali possiamo riguardare le coordinate x, y, z del punto m ed i coseni a, b, c, come altrettante funzioni note di s.

Ciò premesso, diamo un incremento infinitesimo δs all'arco, cioè spostiamo il punto m sulla curva, ed immaginiamo che la seconda terna d'assi si sposti in corrispondenza trasportando con sè il punto M, che supponiamo invariabilmente connesso colla medesima. In questa ipotesi le coordinate ξ, η, ζ non variano punto per lo spostamento effettuato, epperò si ha

$$\delta X = a_1 \delta s + \xi \delta a_1 + \eta \delta a_2 + \zeta \delta a_3 ,$$
$$\delta Y = b_1 \delta s + \xi \delta b_1 + \eta \delta b_2 + \zeta \delta b_3 ,$$
$$\delta Z = c_1 \delta s + \xi \delta c_1 + \eta \delta c_2 + \zeta \delta c_3 .$$

Ma è noto che mercè le convenzioni fatte sul senso dei nuovi assi e indicando con ρ, r i raggi di 1ª e 2ª curvatura, si hanno le formole (dovute a SERRET)

$$\delta a_1 = \frac{a_2 \delta s}{\rho} , \qquad \delta a_2 = -\left(\frac{a_1}{\rho} + \frac{a_3}{r}\right) \delta s , \qquad \delta a_3 = \frac{a_2 \delta s}{r} ,$$

insieme colle analoghe per b e c. Dunque

$$\frac{\delta X}{\delta s} = a_1 \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right) + a_2 \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right) - a_3 \frac{\eta}{r} ,$$

$$\frac{\delta Y}{\delta s} = b_1 \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right) + b_2 \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right) - b_3 \frac{\eta}{r} ,$$

$$\frac{\delta Z}{\delta s} = c_1 \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right) + c_2 \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right) - c_3 \frac{\eta}{r} ,$$

donde, quadrando e sommando, ed indicando con δS lo spostamento del punto M rispetto agli assi fissi,

$$(2) \qquad \frac{\delta S^2}{\delta s^2} = \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r}\right)^2 + \frac{\eta^2}{r^2} .$$

Cerchiamo quali sieno le posizioni del punto M per le quali lo spostamento δS è minimo. Eguagliando perciò a zero le derivate parziali del 2° membro rispetto a ξ, η, ζ, si ottengono tre equazioni, riducibili alle due seguenti:

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) \eta = \frac{1}{\rho} , \qquad \frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{r} = 0 .$$

Queste equazioni manifestano che i punti cercati appartengono ad una retta ca-

ratterizzata dalle proprietà d'incontrare la normale primaria, e d'essere parallela alla retta rettificante corrispondente al punto m. Quindi la retta in discorso non è altro che la minima distanza delle normali primarie relative ai punti s ed $s + \delta s$. Infatti dalla prima delle due equazioni (3) si deduce

$$\frac{\rho - \eta}{\eta} = \frac{\rho^2}{r^2},$$

proprietà che appartiene, come è noto e facilmente si dimostra, al punto in cui l'anzidetta minima distanza incontra la prima normale. La minima distanza è poi parallela alla retta rettificante, perchè quest'ultima è la intersezione di due piani perpendicolari alle due normali contigue.

I valori (3), introdotti nella (2), dànno

$$\delta S = \frac{\varkappa \delta s}{r}, \tag{4}$$

dove

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Da quanto precede, considerando il moto continuo del triedro i cui spigoli sono $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, e ricordando la definizione di quella retta che, nel moto di un sistema rigido, prende il nome di *asse istantaneo di rotazione e strisciamento*, ovvero *d'asse di moto*, si conclude la proprietà seguente:

Il sistema delle tre rette, tangente, normale primaria e normale secondaria di una linea a doppia curvatura, considerato come un sistema di forma invariabile mobile nello spazio, ha per asse di moto, in ciascuna sua posizione, la retta di minima distanza fra la normale primaria corrispondente e la consecutiva.

Se fra le due equazioni (3) si elimina l'arco s, del quale sono funzioni note ρ ed r, si ottiene l'equazione in ξ, η, ζ di quella superficie rigata, invariabilmente connessa al triedro mobile, che è generata dalle successive posizioni (in questo triedro) della minima distanza anzidetta. Questa superficie ha una direttrice rettilinea che è l'asse delle η, ed un piano direttore che è il piano $\xi\zeta$.

Se invece fra le cinque equazioni (1) e (3) si eliminano le quattro quantità ξ, η, ζ, s, si ottiene un'equazione in X, Y, Z che rappresenta un'altra superficie rigata, fissa nello spazio, e generata dalle successive posizioni della stessa minima distanza, considerata nello spazio assoluto.

Il moto del triedro mobile è dunque dovuto ad una rotazione accompagnata da strisciamento della prima superficie rigata sulla seconda. La rotazione elementare, che

ha luogo intorno alla generatrice comune, è espressa da

$$\sqrt{(\delta a_2)^2 + (\delta b_2)^2 + (\delta c_2)^2} = \frac{\delta s}{\varkappa} ;$$

lo strisciamento elementare, che si effettua lungo la medesima generatrice, è equivalente alla minima distanza delle due normali contigue ed ha per valore

$$\delta S = \frac{\varkappa \delta s}{r} ,$$

come si sapeva già dalla formola (4).

Lo strisciamento è nullo quando la curva è piana, e non è nullo che in questo caso.

La rotazione non è nulla per alcuna curva propriamente detta.

Bologna, Dicembre 1866.

XVIII.

INTORNO AD UNA TRASFORMAZIONE DI VARIABILI.

Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pp. 24-27.

La trasformazione delle variabili in una funzione omogenea e del 2° grado rispetto alle derivate parziali di prim'ordine di una medesima funzione, dà luogo ad una singolare corrispondenza che ci proponiamo di stabilire in questa Nota.

Consideriamo n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le loro derivate $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ rispetto ad una variabile indipendente t, e la funzione quadratica ed omogenea di queste derivate

$$X = \frac{1}{2} \sum^{rs} A_{rs} x'_r x'_s, \tag{1}$$

nella quale i coefficienti A_{rs} sono funzioni qualsivogliono delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di altre quantità, soddisfacenti però alle relazioni $A_{rs} = A_{sr}$ per $r \lessgtr s$, e la sommatoria si estende a tutti i valori da 1 ad n tanto dell'indice r quanto di s.

Sostituendo alle primitive variabili x le n nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e trasformando la funzione X dalle x alle y, mediante le relazioni ammesse fra questi due sistemi di variabili e le relazioni che ne conseguono per le loro derivate, della forma

$$x'_r = \sum^{u} \frac{\partial x_r}{\partial y_u} y'_u, \qquad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

dove u deve ricevere tutti i valori da 1 ad n, la funzione (1) si cambia in un'altra

che rappresentiamo con

$$(3)\qquad Y = \frac{1}{2}\sum^{uv} B_{uv} y'_u y'_v ,$$

dove

$$(4)\qquad B_{uv} = B_{vu} = \sum^{rs} A_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_u} \frac{\partial x_s}{\partial y_v} .$$

Moltiplichiamo ambedue i membri dell'equazione (2) per $A_{rs}\dfrac{\partial x_s}{\partial y_v}$ e sommiam spetto agli indici r ed s; otteniamo un risultato che può scriversi nel modo seguente:

$$\sum^s \left(\sum^r A_{rs} x'_r\right) \frac{\partial x_s}{\partial y_v} = \sum^u \left(\sum^{rs} A_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_u} \frac{\partial x_s}{\partial y_v}\right) y'_u ,$$

ossia, in virtù della formola (4),

$$\sum^s \left(\sum^r A_{rs} x'_r\right) \frac{\partial x_s}{\partial y_v} = \sum^u B_{uv} y'_u .$$

Ma dalle (1), (3) si deduce

$$\frac{\partial X}{\partial x'_s} = \sum^r A_{rs} x'_r , \qquad \frac{\partial Y}{\partial y'_v} = \sum^u B_{uv} y'_u ,$$

quindi

$$(5)\qquad \sum^s \frac{\partial X}{\partial x'_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_v} = \frac{\partial Y}{\partial y'_v} .$$

Ora poniamo

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x'_s} = \xi_s , & (s = 1, 2, \dots n) \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial y'_v} = \eta_v , & (v = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

e, dopo aver dedotti dalle prime n di queste equazioni lineari i valori delle $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ in funzione delle $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, dalle seconde quelli delle $y'_1, y'_2, \dots y'_n$ in funzione delle $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$, sostituiamoli rispettivamente nelle funzioni quadratiche X ed Y. Queste funzioni vengono per tal modo a trasformarsi nelle loro *reciproche* e, rappresentando queste ultime con

$$(7)\qquad \overline{X} = \frac{1}{2}\sum^{rs} a_{rs} \xi_r \xi_s , \qquad \overline{Y} = \frac{1}{2}\sum^{rs} b_{rs} \eta_r \eta_s ,$$

si ha, come è noto,

$$a_{rs} = \frac{\partial \log a}{\partial A_{rs}} , \qquad b_{rs} = \frac{\partial \log b}{\partial B_{rs}} ,$$

dove

$$a = \sum(\pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn}), \qquad b = \sum(\pm B_{11} B_{22} \dots B_{nn}).$$

Ciò posto osserviamo che, in virtù delle (6), le equazioni (5) possono scriversi nel modo seguente

$$(8) \qquad \sum^s \frac{\partial x_s}{\partial y_v} \xi_s = \eta_v, \qquad (v = 1, 2, \dots n)$$

e che coll'aiuto di queste n relazioni lineari fra le variabili ξ e le variabili η, le due funzioni $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sono trasformabili l'una nell'altra, ammesse le primitive relazioni fra le x e le y che entrano rispettivamente nei coefficienti di quelle due funzioni. Ora, se V è una funzione qualunque delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$, le sue derivate parziali rispetto a queste variabili sono legate alle analoghe derivate rispetto alle variabili y, dalle relazioni

$$(9) \qquad \sum^s \frac{\partial V}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_v} = \frac{\partial V}{\partial y_v}, \qquad (v = 1, 2, \dots n)$$

aventi gli stessi coefficienti delle (8). Quindi, nello stesso modo che le equazioni (8) rendono identiche fra loro le due funzioni (7), così le equazioni (9) devono rendere identiche, ossia trasformare l'una nell'altra, quelle due funzioni che si deducono dalle (7) col sostituire le derivate parziali $\frac{\partial V}{\partial x_s}$ alle ξ_s e le derivate $\frac{\partial V}{\partial y_v}$ alle η_v, vale a dire le due funzioni

$$\frac{1}{2} \sum^{rs} a_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}, \qquad \frac{1}{2} \sum^{uv} b_{uv} \frac{\partial V}{\partial y_u} \frac{\partial V}{\partial y_v}.$$

Di qui, ricordando che dalla funzione quadratica reciproca di una data si ripassa alla primitiva colle stesse leggi con cui si è dedotto la prima dalla seconda, si raccoglie il teorema seguente:

Sia data la funzione

$$T = \frac{1}{2} \sum^{rs} a_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}, \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

quadratica ed omogenea rispetto alle n derivate parziali di una funzione V delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$, nella quale i coefficienti a_{rs} possono contenere in modo qualunque queste variabili e la funzione V. Per trasformare la funzione T dalle variabili anzidette alle nuove variabili $y_1, y_2, \dots y_n$, si costituisca l'espressione differenziale

$$\frac{1}{2} \sum^{rs} A_{rs} dx_r dx_s,$$

i cui coefficienti A_{rs} sono reciproci di quelli della T; per mezzo delle relazioni fra le x e

le y, si trasformi quest'espressione nella sua equivalente

$$\frac{1}{2}\sum^{rs} B_{rs}\, dy_r\, dy_s\,,$$

e finalmente si costituisca la funzione

$$\frac{1}{2}\sum^{rs} b_{rs}\,\frac{\partial V}{\partial y_r}\,\frac{\partial V}{\partial y_s}$$

a coefficienti reciproci della precedente espressione differenziale. Quest'ultima funzione è la trasformata richiesta.

In questo enunciato è contenuta la legge di corrispondenza alla quale abbiamo accennato da principio. La medesima legge si può enunciare più concisamente dicendo che *quelle relazioni fra le variabili* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *e le* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *che rendono identica l'equazione*

$$\sum^{rs} A_{rs}\, dx_r\, dx_s = \sum^{rs} B_{rs}\, dy_r\, dy_s\,,$$

rendono pure identica la

$$\sum^{rs} a_{rs}\,\frac{\partial V}{\partial x_r}\,\frac{\partial V}{\partial x_s} = \sum^{rs} b_{rs}\,\frac{\partial V}{\partial y_r}\,\frac{\partial V}{\partial y_s}\,,$$

ammesso che i coefficienti A ed a, B e b sieno reciproci fra loro rispettivamente. Ha luogo del pari la reciproca.

Supponiamo p. es. che le relazioni fra le x, y diano

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = B_1\, dy_1^2 + B_2\, dy_2^2 + \cdots + B_n\, dy_n^2\,;$$

le stesse relazioni daranno pure

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = \frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{1}{B_2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{B_n}\left(\frac{\partial V}{\partial y_n}\right)^2.$$

Il risultato testè esposto è implicitamente contenuto nel bel metodo col quale JACOBI ha fatto dipendere le equazioni della dinamica da una equazione a derivate parziali non lineari. Ma stante la sua natura puramente analitica ci è sembrato utile rivocarlo ai suoi principj più semplici.

Bologna, Dicembre 1866.

XIX.

LETTERA AD A. MOGNI.

Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pp. 89-92.

Chiarissimo Signor Professore,

Avendo letto un di Lei articolo contenuto nel « Giornale di Matematiche » che si pubblica in Napoli *), mi è sembrato ch'Ella lasciasse pur sempre sussistere un certo equivoco circa la supposta discrepanza delle due formole di EULERO e di BINET; giacchè sebbene sia verissimo che la differenza dei secondi membri delle sue equazioni (1), (8) proviene da un cambiamento operato nella variabile indipendente, pure mi sembra ch'Ella non abbia ben fissato il punto nel quale questo cambiamento incomincia a produrre i suo effetti. Inoltre mi sembra inammissibile la maggior generalità che Ella vorrebbe attribuire alla formola di BINET in confronto di quella d'EULERO.

Queste due formole si convertono perfettamente l'una nell'altra, quando si trasformino debitamente le derivate. Infatti, indico per chiarezza cogli accenti le derivate prese rispetto al tempo t, e colla lettera d i differenziali e le derivate prese rispetto a θ, cioè nell'ipotesi di $d\theta$ costante; indi, sviluppando la derivata seconda di $\frac{1}{r}$, scrivo la formola di BINET nel modo seguente

$$F = \frac{C^2}{r^3}\left[1 + \frac{2}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right].$$

*) *Sopra le diverse espressioni della forza acceleratrice nella teoria delle forze centrali*, vol. IV (1866), pp. 339-344.

Per le note regole di trasformazione si ha

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'}, \qquad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{\theta' r'' - \theta'' r'}{\theta'^3};$$

ma, pel principio delle aree,

$$\theta' = \frac{C}{r^2}, \qquad \theta'' = -\frac{2Cr'}{r^3},$$

quindi

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 r'}{C}, \qquad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{r^3}{C^2}(rr'' + 2r'^2),$$

e, sostituendo e riducendo,

$$F = \frac{C^2}{r^3} - r'';$$

ma $\frac{C^2}{r^3} = r\theta'^2$, quindi

$$F = r\theta'^2 - r'',$$

che è la formola d'EULERO.

Da questa si ripassa col processo medesimo a quella di BINET. Infatti, prendendo di nuovo per variabile indipendente θ, si ha

$$r'' = \frac{\frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2}}{\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3};$$

ma

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2}{C}, \qquad \frac{d^2 t}{d\theta^2} = \frac{2r}{C}\frac{dr}{d\theta},$$

quindi

$$r'' = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}.$$

D'altronde

$$r\theta'^2 = \frac{r^4\theta'^2}{r^3} = \frac{C^2}{r^3},$$

dunque

$$F = r\theta'^2 - r'' = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right],$$

appunto come volevasi dimostrare.

Or ecco dove comincia precisamente l'apparente discrepanza della sua formola (8) con quella d'EULERO. L'ultima equazione della pag. 339 contiene la derivata $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$, cioè

il quoziente per $d\theta^2$ del differenziale secondo $d^2 r$ preso nell'ipotesi $d\theta =$ costante. Ora, quando Ella sostituisce per $d\theta$ il valore $\frac{C\,dt}{r^2}$, trasformando l'anzidetto quoziente in $\frac{r^4}{C^2} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$, Ella ottiene una quantità $\frac{d^2 r}{dt^2}$ *che non è più una derivata seconda.* Ne viene di conseguenza che la $\frac{d^2 r}{dt^2}$ della formola (8) non è punto la stessa di quella che entra nell'equazione (1) di EULERO, epperò queste due formole non sono comparabili, anzi la formola (8) non è esatta se non a condizione che il quoziente $\frac{d^2 r}{dt^2}$ contenuto in essa, venga preso nel senso da me accennato. Quando questa condizione venga rispettata, l'accordo fra le due formole si ristabilisce subito. Infatti prendendo i differenziali primo e secondo di r (considerato come funzione di t), nell'ipotesi $d\theta =$ cost., si ha

$$dr = r'.dt, \qquad d^2 r = r''.dt^2 + r'.d^2 t,$$

ma

$$dt = \frac{r^2\,d\theta}{C},$$

quindi

$$d^2 t = \frac{2r\,dr\,d\theta}{C} = \frac{2}{r}\,dr\,dt = \frac{2r'}{r}.dt^2,$$

epperò

$$d^2 r = \left(r'' + \frac{2r'^2}{r}\right) dt^2 .$$

Dunque il quoziente $\frac{d^2 r}{dt^2}$, inteso nel debito senso, ha per valore

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r'' + \frac{2r'^2}{r},$$

dove le r', r'' del secondo membro sono le derivate prima e seconda di r rispetto a t. Sostituendo tale valore nella formola (8) si ottiene precisamente la formola di EULERO.

Mi pare che queste osservazioni sieno atte a dissipare ogni dubbio sull'identità dei due risultati, e inoltre a mostrare come nasca la loro apparente diversità.

I successivi sviluppi da Lei destinati alla dimostrazione delle formole (A), (C), (D) sono inappuntabili. Solamente osservo che l'equazione da cui Ella parte (l'ultima della pag. 342) sarebbe stata meglio dedotta dalla formola di BINET, collo sviluppo della derivata seconda $\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}$, come ho fatto io precedentemente, per evitare di far uso della (8) che è soggetta alla restrizione testè espressa, e che, senza di questa, avrebbe potuto condurre anche ad un risultato inesatto, se trovandosi il quoziente $\frac{d^2 r}{dt^2}$ nella (8) soltanto *linearmente*, non fosse accaduta realmente una compensazione d'errori. Quello in cui

non posso accordarmi con Lei è che la deduzione delle formole (A), (C), (D) provi la maggior generalità della formola di BINET in confronto di quella di EULERO. Già credo d'aver reso evidente la loro perfetta equivalenza in quel che precede. Ma la deduzione anzidetta non parmi che possa in alcun modo servire di dimostrazione a quell'asserto. Dal momento che le formole (A), (C), (D) sussistono per una forza F diretta comunque, è naturale che esse si verifichino in particolare per le forze centrali, e che dalle relazioni peculiari a queste ultime emergano le formole generali in discorso. Ma se Ella non sapesse già che queste formole son generali, Ella per certo non avrebbe potuto stabilirne la generalità colla presente dimostrazione. Così, dal fatto che un'equazione finita fra due variabili conduce ad una certa equazione differenziale, non è certamente lecito argomentare che quella sia l'integrale *completo* di questa, bensì che è indubitatamente un integrale, particolare o completo.

Nel caso concreto poi non si potrebbe qualificare la formola di BINET come generale, senza dichiarare in pari tempo qual sia il significato delle r, θ che compaiono in essa, stante la mancanza (nel caso di forze dirette comunque) di un polo situato in modo speciale rispetto alle forze medesime.

Ella vorrà perdonarmi queste osservazioni, minute ed anche minuziose se vuole, ma che riguardano un argomento in certo modo scolastico, nel quale è necessario che la precisione degli enunciati e dei concetti sia piena ed intiera. Se non ho bene intese le di Lei espressioni, mi avverta, in grazia, dell'equivoco nel quale potrei essere caduto.

Coi sentimenti della massima stima.

E. B.

XX.

SULLA MINIMA DISTANZA DI DUE RETTE.

Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pp. 351-354.

La presente Nota ha per oggetto di render ragione, mediante considerazioni geometriche dirette, di un risultato ottenuto dal sig. STAMMER *).

L'ordinaria formola della geometria analitica, per la minima distanza d di due rette (non parallele), è l'espressione della proprietà evidente

$$d = D.\cos f, \tag{1}$$

dove D è la distanza di due punti noti delle due rette ed f è l'angolo che la loro congiungente fa colla direzione della perpendicolare comune alle due rette date.

Quando le due rette sono parallele, la loro minima distanza δ è data dalla formola

$$\delta = \Delta.\cos\varphi, \tag{2}$$

dove Δ ha un significato analogo a quello della D, e φ è l'angolo che la retta Δ fa colla direzione di una retta perpendicolare alle due date *e parallela al loro piano*.

Queste ultime parole esprimono una condizione che viene *aggiunta* per togliere l'indeterminazione a cui conduce, nel caso del parallelismo, il concetto geometrico di cui la (1) è la traduzione. Ne segue necessariamente che, ove si voglia ottenere la (2) mediante la variazione continua degli elementi contenuti nella (1), bisogna tener conto

*) Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pag. 239.

nel passaggio al limite, dell'anzidetta condizione determinativa. Ora se, nel moto continuo delle due rette (o dell'una di esse, che torna lo stesso) si suppone che gli estremi del segmento D convergano verso le posizioni occupate dagli estremi del segmento Δ, è chiaro che si avrà

$$\lim D = \Delta\,;$$

quindi, affinchè si abbia

$$\lim d = \delta\,,$$

bisognerà far convergere le direzioni delle due rette verso il parallelismo in modo che

$$\lim f = \varphi\,.$$

Conduciamo per un punto fisso dei raggi paralleli alle direzioni successivamente variabili della seconda retta: essi formeranno una superficie conica la cui generatrice estrema sarà parallela alla direzione limite tanto della prima quanto della seconda retta, e la perpendicolare al piano tangente lungo questa generatrice estrema determinerà la direzione limite della distanza minima. Dietro quanto si è detto bisognerà regolare la variazione finale delle due rette in modo che questa perpendicolare riesca parallela al piano nel quale esse tendono a disporsi, giacchè è facile vedere che in questo solo caso si può avere $\lim f = \varphi$; ciò è quanto dire che il piano tangente del cono lungo la generatrice finale deve risultare perpendicolare al piano delle due parallele.

Per esprimere questa condizione analiticamente cogli stessi segni del Sig. Stammer, incominciamo dall'osservare che, se si suppone fissa la prima retta e fissa l'origine del segmento D sovr'essa (ciò che è evidentemente lecito), e se si pone in questo punto l'origine degli assi, le coordinate x, y, z del termine di quel segmento sulla seconda retta sono

$$-a\,,\quad -b\,,\quad 0\,. \tag{3}$$

Ciò posto se dall'origine conduciamo un raggio parallelo alla 2ª retta considerata in una posizione qualunque, e su di esso, del pari che sulla 1ª retta, prendiamo due porzioni uguali ad 1, le projezioni sui tre assi della retta congiungente i loro termini non comuni sono

$$\frac{m''}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}}-\frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}\,,$$

$$\frac{n''}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}}-\frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}\,.$$

Questa congiungente tende verso una posizione limite, la quale dev'essere, per quel

che si è veduto, perpendicolare al piano delle due parallele. Ma, nella sua posizione limite, cioè quando le sue projezioni sono

$$(4) \qquad d\frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}, \qquad d\frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}, \qquad d\frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}},$$

questa congiungente è già manifestamente perpendicolare alle rette stesse: basta dunque ch'essa sia perpendicolare ad un'altra retta esistente nel loro piano, p. es. alla retta Δ di cui le (3) sono le projezioni. Quindi la condizione cercata si otterrà moltiplicando fra loro le projezioni omologhe (3) e (4) ed eguagliando a zero la somma dei prodotti. Si trova così

$$(5) \qquad a.d\frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}} + b.d\frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}} = 0,$$

donde

$$\frac{dm'}{dn'} = \lim\frac{m''-m'}{n''-n'} = -\frac{b(1+m'^2)-am'n'}{a(1+n'^2)-bm'n'},$$

con che resta determinata la posizione limite del piano tangente alla superficie conica considerata. Questo valore concorda esattamente con quello trovato dal sig. STAMMER mediante altre considerazioni.

I risultati precedenti assumono una forma più elegante prendendo le equazioni delle due rette sotto la forma simmetrica:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}, \qquad \frac{x-a'}{\cos\alpha'} = \frac{y-b'}{\cos\beta'} = \frac{z-c'}{\cos\gamma'},$$

e supponendo che a, b, c, α, β, γ rimangano costanti, mentre a', b', c' convergono verso valori determinati ed α', β', γ' verso α, β, γ. Infatti la condizione di perpendicolarità dell'ultimo piano tangente del cono considerato col piano delle parallele è evidentemente

$$(6) \qquad (a'-a)\,d\cos\alpha + (b'-b)\,d\cos\beta + (c'-c)\,d\cos\gamma = 0$$

[donde si ricade immediatamente sulla (5) facendo le ipotesi del sig. STAMMER].

Dalla (6) e dall'identica

$$\cos\alpha . d\cos\alpha + \cos\beta . d\cos\beta + \cos\gamma . d\cos\gamma = 0$$

si trae

$$(7) \qquad \begin{cases} d\cos\alpha = [(b'-b)\cos\gamma - (c'-c)\cos\beta]\,dk, \\ d\cos\beta = [(c'-c)\cos\alpha - (a'-a)\cos\gamma]\,dk, \\ d\cos\gamma = [(a'-a)\cos\beta - (b'-b)\cos\alpha]\,dk, \end{cases}$$

dove dk è un fattore indeterminato. Inoltre, chiamando $d\varphi$ l'angolo delle due rette nello stato prossimo al parallelismo, si ha manifestamente

$$(8) \qquad d\varphi^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2 .$$

Coll'ajuto di queste formole è agevole verificare il passaggio dalla formola generale

$$d = \frac{(a'-a)(\cos\beta.\cos\gamma' - \cos\gamma.\cos\beta') + \cdots}{\operatorname{sen}\varphi},$$

dove φ è l'angolo delle due rette, alla formola valevole per il caso del parallelismo. Infatti, nello stato prossimo al parallelismo, l'equazione precedente diventa

$$\lim d = \frac{(a'-a)(\cos\beta.\,d\cos\gamma - \cos\gamma.\,d\cos\beta) + \cdots}{d\varphi},$$

ovvero, raccogliendo nel numeratore $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$,

$$\lim d = \frac{[(b'-b)\cos\gamma - (c'-c)\cos\beta]\,d\cos\alpha + \cdots}{d\varphi},$$

ovvero, per le (7), (8),

$$\lim d = \frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}{dk}.$$

Riponendo di nuovo in questa formola i valori (7), ed eseguendo una trasformazione ben nota, si ha

$$\lim d = \sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2-[(a'-a)\cos\alpha+(b'-b)\cos\beta+(c'-c)\cos\gamma]^2},$$

espressione conosciuta della distanza di due rette parallele passanti pei punti (a, b, c), (a', b', c') ed aventi la direzione (α, β, γ).

XXI.

DELLE VARIABILI COMPLESSE SOPRA UNA SUPERFICIE QUALUNQUE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo I (1867), pp. 329-366.

I.

Rappresentiamo con

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie S che dobbiamo considerare.

Non sarà inutile il rammentare fin dal principio che quando si riguarda una superficie come definita dalla sola espressione del suo elemento lineare, bisogna prescindere da ogni concetto od imagine che implichi una concreta determinazione della sua forma in relazione ad oggetti esterni, p. es. rispetto ad un sistema d'assi rettangolari. Ogni concetto di questo genere conduce facilmente ad equivoci. Ciò solo che si deve tenere per fermo è che ogni coppia distinta di valori delle variabili u, v individua un punto (o più punti discreti) della superficie, il quale (o ciascuno dei quali) rimane, per sè stesso, essenzialmente distinto da quello (o da ciascuno di quelli) cui corrisponde un'altra coppia di valori, non identica alla prima. La possibilità della coincidenza, in un medesimo luogo dello spazio, di due punti non aventi le stesse coordinate curvilinee, non interviene propriamente che quando si considera, o si sottintende, una determinata configurazione della superficie.

La natura delle linee $u =$ cost., $v =$ cost. rimane sostanzialmente indeterminata; ma, per la precisione degli enunciati, noi non considereremo della superficie S che

una porzione Ω, continua e finita, entro la quale si trovino adempiute le seguenti condizioni: 1° che le funzioni E, F, G sieno in ogni punto di Ω reali, monodrome, continue e finite; 2° che le funzioni E, G, $EG - F^2 = H^2$ ricevano in ogni punto di Ω valori positivi e diversi da zero, talchè anche i radicali $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$, $\sqrt{EG - F^2} = H$, che prenderemo sempre positivamente, si conservino reali e monodromi entro l'area considerata.

Di queste condizioni alcune sono necessarie perchè i punti di Ω sieno tutti reali; le altre impongono certe restrizioni alla natura del doppio sistema di curve coordinate, entro i limiti di Ω. Infatti, avendosi in generale

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{H}{\sqrt{EG}},$$

dove θ è l'angolo delle due curve intersecantisi nel punto (u, v), l'ipotesi che $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ ed H sieno quantità positive e maggiori di zero esclude il caso che l'angolo θ diventi uguale a 0° oppure a 180°, cioè che due curve di diverso sistema si tocchino, entro l'area Ω. Conseguentemente la distanza normale di due curve infinitamente vicine del sistema $u =$ cost. (oppure $v =$ cost.) ha un rapporto finito coll'elemento $\sqrt{G}\,dv$ (oppure $\sqrt{E}\,du$) che esse intercettano sulla curva dell'altro sistema passante pel punto considerato, e poichè questo elemento è (per le ipotesi) infinitesimo dello stess'ordine di dv (oppure di du), ne emerge che ad incrementi infinitesimi del parametro u (oppure v) corrispondono curve che sono fra loro infinitamente vicine, ma che non hanno alcun punto comune, nell'interno di Ω.

Inoltre, poichè $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$ ed H sono funzioni monodrome in tutti i punti di Ω, lo stesso ha luogo per le espressioni di $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$: quindi è impossibile che ad una medesima coppia di valori delle u, v corrispondano due valori dell'angolo θ *), e conseguentemente che una linea dell'un sistema tagli quelle dell'altro in più di un punto interno ad Ω, oppure che una curva di qualsivoglia sistema si intersechi con sè stessa in un tal punto.

Ammesse queste proprietà, conseguenze delle ipotesi stabilite, ne risulta evidentemente che ciascuna piccola regione della superficie, circostante ad un punto situato nell'interno di Ω, è coperta da un reticolo di curve coordinate il quale, salvo deviazioni minime, è in tutto simile a quello formato sopra un piano da due sistemi di

*) Quand'anche si volessero supporre eguali questi due valori, non cesserebbe di sussistere la stessa impossibilità, perchè variando infinitamente poco la disposizione delle curve (senza alterare le loro condizioni generali) si renderebbero disuguali i due angoli, senza togliere la monodromia delle funzioni $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

rette parallele. Una tal regione si può chiamare *ordinaria*. Così, l'area Ω è tutta formata di regioni ordinarie, mentre invece il reticolo formato sopra un piano da un sistema di rette divergenti dal centro comune di un sistema di circonferenze concentriche, non presenta dovunque questo carattere, benchè lo riacquisti coll'escludere semplicemente la regione immediatamente circostante al polo.

Per brevità di linguaggio chiameremo curva u (oppure curva v) relativa ad un punto dato (u_0, v_0) della superficie, quella lungo la quale si ha $v=v_0$ (oppure $u=u_0$), mentre u (oppure v) è variabile lungo la medesima. La direzione *positiva* della curva u (oppure della curva v) è quella dello spostamento prodotto da un incremento positivo dato al valore di u (oppure di v), e quindi quella stessa nella quale cresce il suo arco, il cui incremento è $ds_u = \sqrt{E}\,du$ (oppure $ds_v = \sqrt{G}\,dv$). La direzione positiva di una curva u (oppure v), nei varii suoi punti interni ad Ω, non può mai cambiare di senso dall'uno all'altro, perchè E (oppure G) non può mai, per ipotesi, diventare uguale a o. Ne risulta che, se in un punto qualunque interno ad Ω, si conducono le tangenti alle due curve coordinate, nelle rispettive direzioni positive, e si fa poscia muovere il punto entro Ω in modo continuo (del resto arbitrario) insieme colle due tangenti *positive*, mobili intorno ad esso come due aste riunite a cerniera, ha luogo la proprietà che queste due tangenti conservano sempre la medesima disposizione relativa, cioè che il senso della rotazione atta a condurre la tangente della curva u su quella della curva v attraverso l'angolo θ ($< 180^\circ$) interposto è sempre il medesimo. Infatti esso non potrebbe mutare che o con continuità, o per salto: ma non può mutare con continuità perchè l'angolo θ non può mai raggiungere nè 0° nè 180°, come si è già veduto; e neppure può mutare per salto, perchè la direzione positiva della tangente si mantiene costante lungo ciascuna curva u o v, come si è pure osservato or ora. Conseguentemente se si conduce una normale alla superficie, dalla parte conveniente acciò essa si trovi disposta rispetto alle tangenti delle curve u, v come l'asse delle z lo è rispetto a quelli delle x e delle y, si vede che questa normale *positiva* non può mai mutare di senso, nell'interno di Ω, epperò, assumendo come faccia *positiva* della superficie quella sulla quale è eretta la normale positiva, un punto il quale sia mobile comunque con continuità, entro i limiti di Ω non deve mai attraversare la superficie per mantenersi sulla faccia positiva. Solamente fa d'uopo notare che se l'area Ω è composta di più pezzi distinti (circostanza che non è esclusa dalle ipotesi fatte) può accadere che la faccia positiva di uno di questi pezzi non sia nel prolungamento di quella d'un altro: ma in questo caso il punto mobile non potrebbe passare dall'un pezzo all'altro con continuità, e le conclusioni precedenti varrebbero in ciascun pezzo in particolare.

Queste considerazioni, alle quali converrebbe dare una maggiore estensione, se non fossero qui subordinate ad uno scopo speciale, sono assai utili per togliere di mezzo le difficoltà che potrebbero altrimenti insorgere in certe circostanze.

Completiamo questi preliminari col richiamare alcune formole ed espressioni note.

Abbiansi due elementi lineari ds, δs uscenti dal punto (u, v), al primo dei quali corrispondano le variazioni du, dv, al secondo le δu, δv, e sia ε l'angolo che formano, contato, nel senso positivo, da ds verso δs. Qualunque sia [illegible]
hanno le seguenti formole, facilmente dimostrabili,

$$(2)\qquad \begin{cases} ds\,\delta s\cos\varepsilon = E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v\,, \\ ds\,\delta s\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = H(du\,\delta v - dv\,\delta u)\,. \end{cases}$$

Chiamando $\Delta\omega$ il valore assoluto dell'area del parallelogrammo formato sui due elementi ds, δs, ed osservando che $\Delta\omega = \pm\, ds\,\delta s\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$, secondo che ε è minore o maggiore di 180°, si ha, dalla seconda delle precedenti formole,

$$\Delta\omega = \pm\, H(du\,\delta v - dv\,\delta u)\,,$$

formola nella quale si deve scegliere il segno superiore o l'inferiore secondo che la rotazione da ds verso δs, attraverso l'area del parallelogrammo, avviene nel senso positivo o in senso inverso.

Finalmente rammentiamo le espressioni generali di certe quantità che abbiamo chiamate altrove *) parametri differenziali di 1° e di 2° ordine. Se φ e ψ sono due funzioni di u e di v, queste quantità sono le seguenti:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta_1\varphi = \dfrac{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{H^2}\,, \\[2ex] \Delta_1\varphi\psi = \dfrac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\right) + G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{H^2}\,, \\[2ex] \Delta_2\varphi = \dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{H}\right)\right]. \end{cases}$$

$\Delta_1\varphi$ e $\Delta_2\varphi$ sono rispettivamente i *parametri differenziali* di 1° e di 2° *ordine* della funzione φ; $\Delta_1\varphi\psi$ è il *parametro intermedio* delle due funzioni φ e ψ, che si riduce ad un parametro di 1° ordine quando le due funzioni sono eguali. Fra le proprietà di

---

*) *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, art. XIV, nel Giornale di Matematiche, vol. II (1864); oppure queste OPERE, vol. I, pag. 143. Qui abbiamo leggermente mutate le segnature e le definizioni.

questi parametri, oltre quella comune della loro *invariabilità* (vedi le citate *Ricerche*), ricorderemo le seguenti: 1° Che chiamando δn la distanza normale delle due curve φ e $\varphi + \delta\varphi$ nel punto (u, v), si ha

$$\Delta_1 \varphi = \frac{\delta \varphi^2}{\delta n^2}.$$

2° Che ponendo uguale a 0 il parametro intermedio $\Delta_1 \varphi \psi$, si ha la condizione di ortogonalità dei due sistemi di curve $\varphi =$ cost., $\psi =$ cost. 3° Che ponendo uguale a 0 il parametro di 2° ordine $\Delta_2 \varphi$, si ha la condizione di *isometria* del sistema di curve $\varphi =$ cost., cioè la condizione perchè le varie curve di esso, corrispondenti ad incrementi infinitesimi ed eguali di φ, associate colle curve ortogonali (opportunamente distribuite), dividano la superficie in quadrati infinitamente piccoli.

II.

Siano

$$U du + V dv, \qquad U du + V' dv,$$

i due fattori imaginarj conjugati del secondo membro della (1), dove

$$(4) \qquad U = \sqrt{E}, \qquad V = \frac{F + iH}{U}, \qquad V' = \frac{F - iH}{U},$$

e quindi $V V' = G$. Conserviamo alle caratteristiche d, δ i significati in cui furono adoperate nel precedente articolo, e formiamo il rapporto

$$\frac{U \delta u + V \delta v}{U du + V dv},$$

al quale si può dare la forma $\rho e^{i\lambda}$, talchè

$$\frac{E \delta u + F \delta v + iH \delta v}{E du + F dv + iH dv} = \rho e^{i\lambda}.$$

Eguagliando fra loro le parti reali ed imaginarie di questa equazione, e ponendo mente alle (2), si trova

$$\rho \cos \lambda = \frac{\delta s}{ds} \cos \varepsilon, \qquad \rho \operatorname{sen} \lambda = \frac{\delta s}{ds} \operatorname{sen} \varepsilon,$$

donde

$$\rho = \frac{\delta s}{ds}, \qquad \lambda = \varepsilon,$$

e quindi

$$\frac{U\delta u + V\delta v}{\delta s} = \frac{U du + V dv}{ds} e^{i\varepsilon}. \tag{5}$$

Se supponiamo che le lunghezze ds, δs sieno eguali fra loro, il secondo elemento δs può considerarsi come ottenuto mediante una rotazione uguale ad ε del primo, nel senso positivo. La formola precedente ci insegna pertanto che il binomio differenziale complesso $U\delta u + V\delta v$, relativo all'elemento ruotato, si ottiene dall'analogo binomio $U du + V dv$ relativo all'elemento primitivo, moltiplicando quest'ultimo pel fattore $e^{i\varepsilon}$ dove ε è la grandezza della rotazione: proprietà analoga a quella che ha luogo nel piano pel binomio finito $x + iy$, considerato come rappresentante un raggio vettore uscente dall'origine delle coordinate. La medesima proprietà ha luogo naturalmente anche se il binomio $U du + V dv$ si moltiplica per una funzione qualunque delle u, v, e quindi in particolare essa sussiste per il binomio

$$\varkappa(U du + V dv) = dp + i dq = dw,$$

che si ottiene moltiplicando il binomio primitivo per uno qualunque, $\varkappa$, dei fattori che lo rendono differenziale esatto (fattore generalmente imaginario).

È bene notare che, stante la forma non simmetrica delle quantità U, V, alle precedenti relazioni si potrebbe dare un altro aspetto: così la (5) può scriversi nei due modi seguenti:

$$\frac{E\delta u + F\delta v + iH\delta v}{E du + F dv + iH dv} = \frac{F\delta u + G\delta v - iH\delta u}{F du + G dv - iH du} = \frac{\delta s}{ds} e^{i\varepsilon}, \tag{6}$$

che è utile di tener presenti, per evitare delle trasformazioni.

Dalle precedenti osservazioni è facile rilevare che, quando si voglia applicare vantaggiosamente la teoria delle variabili complesse e delle loro funzioni allo studio delle superficie, non è in generale $u + iv$ la variabile complessa che conviene scegliere, ma bensì quella che si ottiene dall'integrazione del binomio $U du + V dv$ previamente moltiplicato per un suo fattore integrante $\varkappa$. Ora, benchè la determinazione di una tale variabile complessa dipenda da una integrazione, eseguibile solamente in certi casi particolari, le funzioni di essa, considerate in rapporto alle primitive variabili u e v, posseggono dei caratteri speciali, sufficienti a definirle, ed assegnabili in generale *a priori*.

Sia infatti $f(u, v)$ una funzione della variabile complessa w concepita nel senso testè dichiarato e riferita alla superficie S. Consideriamo la derivata di questa funzione rispetto a quella variabile, derivata che si può rappresentare così:

$$\frac{df}{dw} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv}{\varkappa(U du + V dv)},$$

ossia

$$\frac{df}{dw} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du}}{\varkappa U + \varkappa V \frac{dv}{du}}.$$

Se assumiamo, con RIEMANN, come carattere distintivo delle nuove funzioni, quello di avere una derivata unica, indipendente dalla direzione $\frac{dv}{du}$, dovremo porre

$$\frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v} = \varkappa U : \varkappa V,$$

ossia

$$U\frac{\partial f}{\partial v} - V\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

La proprietà caratteristica delle funzioni f di w è tutta contenuta in questa equazione, la quale può scriversi nei due modi seguenti:

$$(7) \qquad E\frac{\partial f}{\partial v} - F\frac{\partial f}{\partial u} = iH\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad G\frac{\partial f}{\partial u} - F\frac{\partial f}{\partial v} = -iH\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Elevando al quadrato ambedue i membri di una di queste equazioni, si trova

$$E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = 0,$$

ossia, per le (3),

$$(8) \qquad \Delta_1 f = 0,$$

equazione che sussiste anche per quella funzione che si deduce da f mutando i in $-i$. Dunque: *le funzioni f di w, espresse per u e v, hanno il parametro differenziale di 1° ordine eguale a zero, e sono le sole che godano di questa proprietà.*

Supponiamo decomposta la funzione f nelle sue due parti, reale ed imaginaria, e sia $f = \varphi + i\psi$. Sostituendo questo valore nella (8) si trova facilmente

$$\Delta_1\varphi - \Delta_1\psi + 2i\Delta_1\varphi\psi = 0,$$

donde, poichè φ e ψ sono funzioni reali, si trae

$$\Delta_1\varphi\psi = 0, \qquad \Delta_1\varphi = \Delta_1\psi.$$

La prima di queste due equazioni esprime (art. I) che: *le due famiglie di curve $\varphi =$ cost., $\psi =$ cost. sono fra loro ortogonali.* La seconda può scriversi (ibid.)

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta\psi}\right)^2 = \left(\frac{\delta n_\varphi}{\delta n_\psi}\right)^2,$$

δn_φ, δn_ψ essendo le distanze normali, nello stesso punto (u, v), di due curve contigue del sistema $\varphi = \text{cost.}$, e di due del sistema $\psi = \text{cost.}$ Se ne conclude che: *prendendo gli incrementi $\delta\varphi$, $\delta\psi$ eguali fra loro, le curve $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ dividono la superficie in quadrati infinitamente piccoli,* cioè sono curve isometriche.

Sostituendo nelle (7) il valore $f = \varphi + i\psi$, si trovano le seguenti quattro equazioni reali:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{H} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad &\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H} = \frac{\partial\psi}{\partial v},\\ &\frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{H} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad &\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{H} = -\frac{\partial\varphi}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

delle quali due qualunque sono una conseguenza delle rimanenti. *Queste formole contengono le relazioni necessarie e sufficienti a caratterizzare le due parti, reale ed imaginaria, di una funzione f della specie qui considerata.*

Eliminando la funzione ψ si trova

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{H}\right) = 0;$$

ed un'equazione della medesima forma ottiensi eliminando φ. Questi due risultati possono scriversi [art. I, eq. (3)]:

$$(10)\qquad \Delta_2\varphi = 0, \qquad \Delta_2\psi = 0,$$

e conseguentemente si ha del pari

$$\Delta_2 f = 0,$$

come direttamente si deduce anche dalle (7). Dunque: *le funzioni f hanno la proprietà di avere ambedue i parametri differenziali eguali a zero; e le loro due componenti reali φ e ψ hanno il parametro di 2° ordine eguale a zero.*

Una funzione reale φ, soddisfacente all'equazione $\Delta_2\varphi = 0$, può sempre considerarsi come la parte reale di una funzione f. Infatti, qualunque sia la funzione reale φ, l'equazione $\varphi = \text{cost.}$ rappresenterà un sistema di curve, che saranno tagliate ortogonalmente dalle curve di un certo altro sistema $\Psi = \text{cost.}$, talchè si avrà

$$\Delta_1\varphi\Psi = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial u}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = 0.$$

Esisterà dunque un fattore K, funzione in generale di u, v, che renderà

$$(\dagger) \qquad E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -K\frac{\partial \Psi}{\partial u}, \qquad G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v} = K\frac{\partial \Psi}{\partial v}.$$

Sostituendo questi valori nella $\Delta_2 \varphi = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial \frac{K}{H}}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v} - \frac{\partial \frac{K}{H}}{\partial v}\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0,$$

equazione dalla quale si deduce, come è noto,

$$\frac{K}{H} = F(\Psi),$$

dove F rappresenta una funzione arbitraria. Se quindi si pone

$$F(\Psi)d\Psi = d\psi,$$

ciò che equivale a mutare il parametro delle curve ortogonali alle date, si ha

$$F(\Psi)\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad F(\Psi)\frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

e le equazioni $(\dagger)$ ricadono nelle (9).

III.

Affinchè le funzioni complesse f rientrino nelle ordinarie funzioni del binomio $u + iv$, bisogna, come è noto, che sussistano le due relazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Eliminando con queste la funzione ψ dalle (9), si trova

$$(H - E)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + F\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \qquad F\frac{\partial \varphi}{\partial v} + (H - G)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

equazioni che non possono essere soddisfatte simultaneamente da una medesima funzione delle u, v, se non ha luogo l'identità

$$(H - E)(H - G) - F^2 = 0,$$

ossia

$$(E - G)^2 + 4F^2 = 0,$$

la quale, ritenuta reale la superficie, si decompone nelle due condizioni

$$E = G, \qquad F = 0,$$

che caratterizzano le coordinate isometriche. Dunque solamente pei varj sistemi di coordinate isometriche hanno luogo, rispetto ad una superficie qualunque, quelle proprietà che si verificano nel piano, riferito a coordinate rettangole x ed y, per le funzioni dell'ordinaria variabile complessa $x + iy$.

Tratteniamoci alquanto su questo caso, il quale, benchè già molto conosciuto, porge nondimeno occasione ad alcune nuove considerazioni di qualche interesse.

Ritenuta per l'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{k^2},$$

imaginiamo che sulla superficie sia tracciata una linea chiusa, rappresentata dalle equazioni

$$p = p_0(u), \qquad q = q_0(u),$$

dove u è un parametro che ne individua i successivi punti. Poichè la linea si suppone chiusa, è chiaro che la scelta di questo parametro si potrà sempre fare in modo che le due funzioni $p_0(u)$, $q_0(u)$ sieno periodiche e che il loro periodo sia 2π, talchè, per mezzo del teorema di Fourier, si potranno esprimere nel modo seguente:

$$(11)\quad p_0(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} p_0(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha, \qquad q_0(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} q_0(\alpha)\, e^{im(u-\alpha)}\, d\alpha.$$

Ciò premesso, supponiamo diviso l'intero periodo 2π della variabile u in un gran numero di parti eguali che denoteremo con Δu, corrispondenti ad altrettanti elementi in cui si troverà divisa la curva e che riguarderemo come rettilinei. Poscia facciamo ruotare ciascun elemento di un angolo λ (costante) contato verso l'interno della curva e indichiamo con ∇p, ∇q le variazioni di p, q corrispondenti al termine dell'elemento così spostato, conservando la caratteristica Δ per le variazioni lungo la curva primitiva. Per la proprietà stabilita al principio dell'articolo precedente avremo

$$\nabla(p + iq) = e^{i\lambda}.\Delta(p_0 + iq_0).$$

Facendo quest'operazione per tutti gli elementi, avremo, nei termini degli elementi stessi dopo la rotazione, i punti di una linea contigua alla primitiva, e indicatone con

p_1, q_1 le coordinate, potremo scrivere

$$p_1 + i q_1 = p_0 + i q_0 + e^{i\lambda} \Delta (p_0 + i q_0),$$

ovvero, usando una notissima segnatura simbolica,

$$p_1 + i q_1 = (1 + e^{i\lambda} \Delta)(p_0 + i q_0).$$

Operando su questa seconda curva come si è fatto sulla prima, si trova una terza curva, ed indicandone con p_2, q_2 le coordinate, si ha, pure simbolicamente,

$$p_2 + i q_2 = (1 + e^{i\lambda} \Delta)^2 (p_0 + i q_0),$$

poscia

$$p_3 + i q_3 = (1 + e^{i\lambda} \Delta)^3 (p_0 + i q_0),$$

e, dopo n simili operazioni,

$$p_n + i q_n = (1 + e^{i\lambda} \Delta)^n (p_0 + i q_0). \tag{12}$$

Ora, se per brevità si pone

$$p_0(u) + i q_0(u) = F(u),$$

dalle due formole (11) si deduce

$$p_0 + i q_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} F(\alpha) e^{im(u-\alpha)} d\alpha,$$

e da questa, continuando ad usare la precedente segnatura simbolica,

$$(1 + e^{i\lambda} \Delta)^n (p_0 + i q_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (1 + m i e^{i\lambda} \Delta u)^n \int_0^{2\pi} F(\alpha) e^{im(u-\alpha)} d\alpha. \tag{13}$$

Il luogo dei punti (p_n, q_n) corrispondenti ai successivi valori di n e ad uno stesso valore di u, è una curva di cui chiameremo v il parametro, ed è chiaro che potremo porre $v = n . \Delta u$, talchè la curva primitiva sarà rappresentata da $v = 0$. Per tal guisa chiamando p, q le coordinate del punto (u, v) e raffrontando le due equazioni (12), (13), potremo scrivere

$$p + i q = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{2\pi} F(\alpha) e^{im(u-\alpha)} d\alpha \right] . \lim (1 + m i e^{i\lambda} \Delta u)^{\frac{v}{\Delta u}}$$

per $\Delta u = 0$.

Ma è noto che

$$\lim_{\Delta u = 0} (1 + m i e^{i\lambda} \Delta u)^{\frac{v}{\Delta u}} = e^{m i v e^{i\lambda}},$$

quindi

$$p + iq = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\, e^{im(u+ve^{i\lambda}-\alpha)}\, d\alpha\,,$$

ovvero, pel teorema di FOURIER,

$$p + iq = F(u + ve^{i\lambda}), \tag{14}$$

cioè

$$p + iq = p_0(u + ve^{i\lambda}) + iq_0(u + ve^{i\lambda})\,.$$

Quest'equazione complessa, decomposta in due reali, determina completamente i due sistemi di curve $u =$ cost., $v =$ cost., in coordinate p e q, sistemi la cui natura dipende da quella della curva primitiva e del suo parametro u: questa stessa curva appartiene al sistema $v =$ cost. e corrisponde al valore $v = 0$.

Dalla costruzione infinitesimale che abbiamo effettuata emerge chiaramente che i due sistemi $u =$ cost., $v =$ cost. si tagliano dovunque sotto l'angolo costante λ. Ciò è confermato dall'osservare che l'equazione (14) dà

$$dp^2 + dq^2 = (\mathrm{mod}\, F')^2 (du^2 + 2\, du\, dv \cos\lambda + dv^2)\,,$$

e quindi

$$ds^2 = \left(\frac{\mathrm{mod}\, F'}{k}\right)^2 (du^2 + 2\, du\, dv \cos\lambda + dv^2)\,,$$

espressione che, paragonata alla (1), mostra essere appunto λ l'angolo delle curve $u =$ cost., $v =$ cost. Anzi se si pon mente alla immediata deduzione di questo risultato dalla sola equazione (14), si vede che ha luogo il seguente teorema: *se p e q sono coordinate isometriche di una superficie, eguagliando il binomio $p + iq$ ad una qualunque funzione di $u + ve^{i\lambda}$ (dove u, v sono parametri variabili e λ una costante reale), si ottengono due sistemi di curve $u =$ cost., $v =$ cost. che si tagliano dovunque sotto l'angolo λ*. Da questo teorema, nel caso particolare in cui $\lambda = \frac{\pi}{2}$, si ottiene una notissima proposizione di GAUSS. La restrizione introdotta nella precedente analisi, col supporre che la primitiva curva $v = 0$ fosse chiusa, non è essenziale al teorema precedente, come appare dall'ultima sua dimostrazione.

Il qual teorema dev'essere completato coll'osservazione che *le curve del sistema $v =$ cost. sono, per una stessa funzione F di $u + ve^{i\lambda}$, indipendenti dall'angolo λ*, cosicchè da una medesima funzione si deduce un sistema di curve, accompagnato dai sistemi delle sue trajettorie sotto tutti gli angoli possibili. Ci dispensiamo dal dimostrare questa proprietà, la quale risulta con evidenza dalla costruzione infinitesimale effettuata. Così non è necessario dimostrare che le curve $v =$ cost. sono isometriche,

e che lo sono parimenti tutti i sistemi $u =$ cost. corrispondenti ai diversi valori di λ. Vi è però un ravvicinamento che merita di essere fatto, ed è il seguente.

Dietro quanto precede è chiaro che ogni volta che le coordinate p e q di una linea tracciata sulla superficie sono date in funzione di un parametro u, viene ad essere determinato un sistema di linee isoterme, del quale essa fa parte, ed il quale alla sua volta determina infiniti altri sistemi, formati dalle trajettorie di esso sotto tutti gli angoli costanti. Ne risulta che per ogni punto della curva primitiva passano infinite curve le quali fanno colla curva stessa tutti gli angoli possibili e che si possono chiamare per un momento le isoterme di quel punto. Ciò posto, se, sulla curva primitiva, ad u si danno n incrementi consecutivi uguali a Δu, è ovvio che le coordinate (isometriche) p_n, q_n del punto finale, sono legate alle coordinate p_0, q_0 del punto iniziale dalla formola simbolica

$$p_n + i q_n = (1 + \Delta)^n (p_0 + i q_0), \tag{15}$$

conseguenza della notissima

$$p_n = (1 + \Delta)^n p_0,$$

riportata in tutti i trattati. Ora noi invece abbiamo trovato che un analogo spostamento sulla curva isoterma che parte dal punto (p_0, q_0) sotto l'angolo λ dà luogo alla formola (12), la quale, nel caso particolare dell'angolo retto, diventa

$$p_n + i q_n = (1 + i\Delta)^n (p_0 + i q_0). \tag{16}$$

I secondi membri delle equazioni simboliche (15), (16), (12) differiscono pei fattori rispettivi

$$1 + \Delta, \qquad 1 + i\Delta, \qquad 1 + e^{i\lambda}\Delta,$$

e la forma dei medesimi conduce naturalmente all'osservazione che, nello stesso modo che il simbolo Δ nel primo di essi accenna notoriamente ad una differenziazione nel senso della curva primitiva, cioè ad una differenziazione *diretta* o *reale*, così il simbolo $i\Delta$ del secondo accenna ad una differenziazione *ortogonale* od *imaginaria*, ed il simbolo $e^{i\lambda}\Delta$ del terzo ad una differenziazione *obliqua* o *complessa*. E, mentre la differenziazione diretta (Δ) che è l'ordinaria, corrisponde allo spostamento del punto sulla curva primitiva, così la seconda ($i\Delta$) corrisponde allo spostamento lungo l'isoterma ortogonale e la terza ($e^{i\lambda}\Delta$) allo spostamento lungo l'isoterma inclinata dell'angolo indicato dal simbolo di differenziazione complessa. Per tal guisa la differenziazione ordinaria si presenterebbe qui come caso particolare di una operazione più generale, la quale troverebbe nelle precedenti considerazioni geometriche una definizione ed un'imagine altrettanto semplici e chiare quanto quelle della prima.

IV.

Le funzioni $p_0(u)$, $q_0(u)$ usate nelle considerazioni dell'articolo precedente possono assumere moltissime forme diverse, senza che la curva da esse individuata cambi sostanzialmente di natura. A ciascuna delle forme conciliabili con questa condizione corrisponde uno speciale sistema isometrico, di cui essa fa parte, precedentemente designato con $v =$ cost. Si può determinare la forma di quelle funzioni introducendo opportune condizioni. Ne daremo un esempio, supponendo che, insieme alla curva anzidetta, sia data la curva isometrica che deve succederle a distanza infinitesima nel sistema isometrico, del quale facciano parte due curve infinitamente vicine, date ad arbitrio.

Le due curve contigue siano definite dalle equazioni

$$(17)\qquad \begin{cases} p = p_0(u), \\ q = q_0(u), \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = p_0(u) + \gamma P(u), \\ q_1 = q_0(u) + \gamma Q(u), \end{cases}$$

dove γ è una costante infinitamente piccola. Gli incrementi delle coordinate p, q corrispondenti all'estremità dell'elemento ds della prima curva sono $p_0'(u)\,du$, $q_0'(u)\,du$; all'incontro gli incrementi corrispondenti all'estremità dell'elemento δs compreso fra il punto (u) della prima curva e il punto (u) della seconda sono $p_1 - p_0$, $q_1 - q_0$, ossia $\gamma P(u)$, $\gamma Q(u)$. Quindi si ha

$$ds = \frac{du\sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}}{k}, \qquad \delta s = \frac{\gamma\sqrt{P^2 + Q^2}}{k},$$

ed il seno dell'angolo λ compreso dai due elementi ds, δs [eq. (2)] è dato da

$$\operatorname{sen}\lambda = \frac{(p_0' Q - q_0' P)\gamma\, du}{k^2\, ds\, \delta s};$$

se dunque si chiama δn la distanza normale delle due curve nel punto (u), si ha

$$\delta n = \delta s \operatorname{sen}\lambda = \frac{(p_0' Q - q_0' P)\gamma}{k\sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}}.$$

Ora, se si vuole che la nuova variabile indipendente, che diremo w, determini, coi suoi incrementi eguali, i lati dei quadratelli compresi fra le due curve e gli elementi normali ad esse, bisogna manifestamente che per essa risulti $ds = \delta n$, cioè:

$$\frac{du\sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}}{k} = \frac{(p_0' Q - q_0' P)\gamma}{k\sqrt{p_0'^2 + q_0'^2}};$$

e, poichè l'infinitesimo γ è costante, come dev'esserlo dw, si può porre

$$\gamma = C dw,$$

C essendo una costante finita. Sostituendo questo valore nella precedente equazione ed integrando, si trova

$$(18) \qquad Cw = \int \frac{p_0'^2 + q_0'^2}{p_0' Q - q_0' P} du,$$

quadratura che serve alla determinazione della variabile w, la quale non è altro che il parametro isometrico del sistema ortogonale a quello definito dalle due curve prossime date. La costante C rimane essenzialmente arbitraria, ma nei singoli casi si può determinare dietro considerazioni di speciale opportunità.

Facciamo due esempi semplicissimi, relativi ad un piano.

Le coordinate isometriche p, q sieno le ordinarie coordinate rettangole x, y e la prima curva sia l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che rappresenteremo colle due equazioni equivalenti

$$(19) \qquad x = a \cos u, \qquad y = b \operatorname{sen} u.$$

La curva infinitamente vicina sia un'ellisse omofocale. Indicando i semiassi di questa con $a - \alpha$, $b - \beta$, (α, β infinitesimi), si dovrà avere

$$(a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2 = a^2 - b^2,$$

quindi

$$a\alpha = b\beta.$$

Rappresentando con $c\gamma$ il valor comune di questi due prodotti, dove γ è un infinitesimo e c una costante finita, si può dunque porre

$$\alpha = \frac{c}{a}\gamma, \qquad \beta = \frac{c}{b}\gamma,$$

e l'ellisse contigua alla precedente è rappresentabile colle formole

$$x_1 = \left(a - \frac{c}{a}\gamma\right) \cos u, \qquad y_1 = \left(b - \frac{c}{b}\gamma\right) \operatorname{sen} u.$$

Paragonando le equazioni attuali alle (17) si trova

$$p_0 = a \cos u\,, \qquad P = -\frac{c}{a} \cos u\,,$$

$$q_0 = b \operatorname{sen} u\,, \qquad Q = -\frac{c}{b} \operatorname{sen} u\,,$$

e conseguentemente dalla (18) si trae

$$w = \frac{ab}{Cc} u\,,$$

o, più semplicemente, $w = u$, se si determina C in modo che le due variabili u e w vadano contemporaneamente da 0 a 2π. Per tal modo si vede che le formole atte a rappresentare la prima ellisse dietro la condizione prescritta sono le stesse (19), col semplice cambiamento di u in w.

Ciò premesso, se si vuole ottenere il doppio sistema ortogonale $u =$ cost., $v =$ cost., di cui fanno parte le due ellissi omofocali contigue, basterà fare

$$x + iy = a \cos(u + iv) + ib \operatorname{sen}(u + iv)\,,$$

ovvero, ponendo

$$a = \sqrt{a^2 - b^2}.\cosh v_0\,, \qquad b = \sqrt{a^2 - b^2}.\operatorname{senh} v_0$$

e scrivendo poscia, ciò che è evidentemente lecito, v in luogo di $v - v_0$,

$$x + iy = \sqrt{a^2 - b^2}.\cos(u + iv)\,,$$

formola donde si ricava, come è notissimo, il doppio sistema ortogonale delle coniche omofocali. Se invece si ponesse

$$x + iy = \sqrt{a^2 - b^2}.\cos(u + v e^{i\lambda})\,,$$

si avrebbe il doppio sistema formato dalle stesse ellissi omofocali del sistema precedente e dalle curve (trascendenti) che le tagliano sotto l'angolo costante λ.

Il secondo esempio sarà quello di due circonferenze infinitamente vicine, l'una interna all'altra. Ponendo i loro centri sull'asse delle y, sia

$$x^2 + (y - a)^2 = c^2 \tag{20}$$

l'equazione della circonferenza esterna, alla quale sostituiremo le formole

$$x = c \cos u\,, \qquad y = a + c \operatorname{sen} u\,. \tag{20'}$$

Indicando con $c - \delta c$, $a - \delta a$ il raggio e l'ordinata del centro della circonferenza interna, e supponendo δa positivo, si deve avere $\delta a < \delta c$; quindi si può porre

$$\delta c = \gamma c\,, \qquad \delta a = \gamma c \cos \mu\,, \qquad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}\,,$$

e l'equazione della seconda circonferenza risulta, per γ infinitesimo,

$$x^2 + (y - a)^2 + 2\gamma c(y - a)\cos\mu = c^2 - 2c^2\gamma,$$

cosicchè l'asse radicale delle due circonferenze è la retta

$$(y - a)\cos\mu + c = 0.$$

È lecito prendere questa retta per asse delle x ed in questa ipotesi, essendo $y = 0$, si trova fra a e c la relazione $c = a\cos\mu$, la quale determina quel punto dell'asse delle y nel quale si deve collocare il centro della prima circonferenza. Se ne conclude che μ è l'angolo fatto coll'asse delle x dalla tangente condotta a questa dall'origine.

Avuto riguardo ai precedenti risultati, si trova che nel caso attuale si ha

$$p_0 = c\cos u, \qquad P = -c\cos u,$$

$$q_0 = c\,\mathrm{sen}\,u + \frac{c}{\cos\mu}, \qquad Q = -c(\mathrm{sen}\,u + \cos\mu),$$

talchè la formola (18) diventa

$$Cw = \int \frac{du}{1 + \cos\mu\,.\,\mathrm{sen}\,u}.$$

Eseguendo l'integrazione *) e determinando convenientemente le costanti, si trova

$$\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\mu}{2}\,\mathrm{tg}\frac{w}{2}.$$

A questa formula si può dare la forma

$$\frac{e^{iu} + i}{e^{iu} - i} = i\,\mathrm{tg}\frac{\mu}{2}\,\mathrm{tg}\frac{w}{2},$$

e siccome le (20') dànno $e^{iu} = \dfrac{x + iy}{c} - \dfrac{i}{\cos\mu}$, così si ha pure

$$\frac{x + iy - il\,\mathrm{tg}\dfrac{\mu}{2}}{x + iy - il\cot\dfrac{\mu}{2}} = i\,\mathrm{tg}\frac{\mu}{2}\,\mathrm{tg}\frac{w}{2},$$

*) Abbiamo cambiato le parole «ed aggiungendo la condizione che u e w vadano contemporaneamente da 0 a 2π» perchè non corrispondenti alla formula che segue. [N. d. R.].

chiamando l la lunghezza della tangente condotta dall'origine alla circonferenza data, cioè $l = c \operatorname{tg} \mu$.

Per avere il doppio sistema isometrico ortogonale, bisogna porre $u + iv$ in luogo di w. Si riduce l'equazione risultante a maggior semplicità cambiando l'origine delle v col porre $w = u + i(v - v_0)$, ossia col cambiare w in $w - iv_0$ (se $w = u + iv$). Infatti si trova così

$$\frac{x + iy - il \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}{x + iy - il \cot \frac{\mu}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \coth \frac{v_0}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{w}{2} - i \operatorname{tgh} \frac{v_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{w}{2} - i \coth \frac{v_0}{2}},$$

ossia, determinando v_0 in modo che $\operatorname{tgh} \frac{v_0}{2} = \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$,

$$\frac{x + iy - il \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}{x + iy - il \cot \frac{\mu}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{w}{2} - i \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{w}{2} - i \cot \frac{\mu}{2}},$$

donde si trae manifestamente

$$x + iy = l \operatorname{tg} \frac{u + iv}{2}.$$

Ecco dunque come si risolve la questione proposta: data la circonferenza primitiva di raggio c, si faccia passare pel centro di essa e della contigua l'asse delle y, e si prenda per asse delle x l'asse radicale delle due circonferenze; indi si determini la lunghezza l della tangente condotta dall'origine, e finalmente si ponga

$$x + iy = l \operatorname{tg} \frac{u + iv}{2}.$$

In virtù di tale relazione le variabili u, v diventano i parametri di due sistemi isometrici ortogonali: le due circonferenze primitive appartengono al sistema $v = \text{cost.}$, e propriamente la equazione (20) si ottiene ponendo $v = v_0$, dove

$$\operatorname{tgh} \frac{v_0}{2} = \sqrt{\frac{a - c}{a + c}} = \frac{a - c}{l}.$$

Il doppio sistema ortogonale così ottenuto è formato di due famiglie di circonferenze, ed è tanto noto che è inutile sviluppare ulteriormente la soluzione che vi ci ha condotti, bastando accennare le espressioni delle coordinate ortogonali x, y in fun-

zione delle u, v, che sono

$$x = \frac{l \operatorname{sen} u}{\cos u + \cosh v}, \qquad y = \frac{l \operatorname{senh} v}{\cos u + \cosh v},$$

e quella dell'elemento lineare, che è

$$dx^2 + dy^2 = \frac{l^2 (du^2 + dv^2)}{(\cos u + \cosh v)^2}.$$

Se invece si ponesse

$$x + iy = l \operatorname{tg} \frac{u + v e^{i\lambda}}{2},$$

si otterrebbero due sistemi di curve, l'uno dei quali, cioè $v =$ cost., sarebbe formato di tutte le circonferenze d'eguale equazione dell'esempio precedente, e l'altro dalle curve che tagliano queste circonferenze sotto l'angolo costante λ.

V.

Passiamo ora ad un altro genere di considerazioni, che ci serviranno poscia a stabilire le proprietà del fattore integrante $\varkappa$.

Nell'interno dell'area Ω immaginiamo tracciata una linea chiusa, costituente il contorno *completo* di un pezzo di superficie appartenente alla regione ordinaria considerata; sia Ω' l'area di questo pezzo.

Se il contorno di Ω' non è per sè stesso tale da essere intersecato in due soli punti da ciascuna delle curve $u =$ cost., $v =$ cost. che lo incontrano, è chiaro che si potrà sempre suddividere l'area Ω' abbracciata da esso, mediante linee Λ' opportunamente tracciate, in modo che tale condizione sia soddisfatta.

Ciò posto consideriamo l'area ω di uno dei pezzi risultanti da questa suddivisione, e chiamiamo $d\omega$ il suo elemento, dato da $d\omega = H\,du\,dv$, formola nella quale gli incrementi du, dv devono essere supposti positivi. Sieno φ, ψ due funzioni di u e v, monodrome, finite e continue, insieme colle loro derivate prime, in tutti i punti di Ω', e pongasi

$$\Pi = \int \Delta_1 (\varphi \psi) . d\omega,$$

l'integrale essendo esteso a tutta l'area ω.

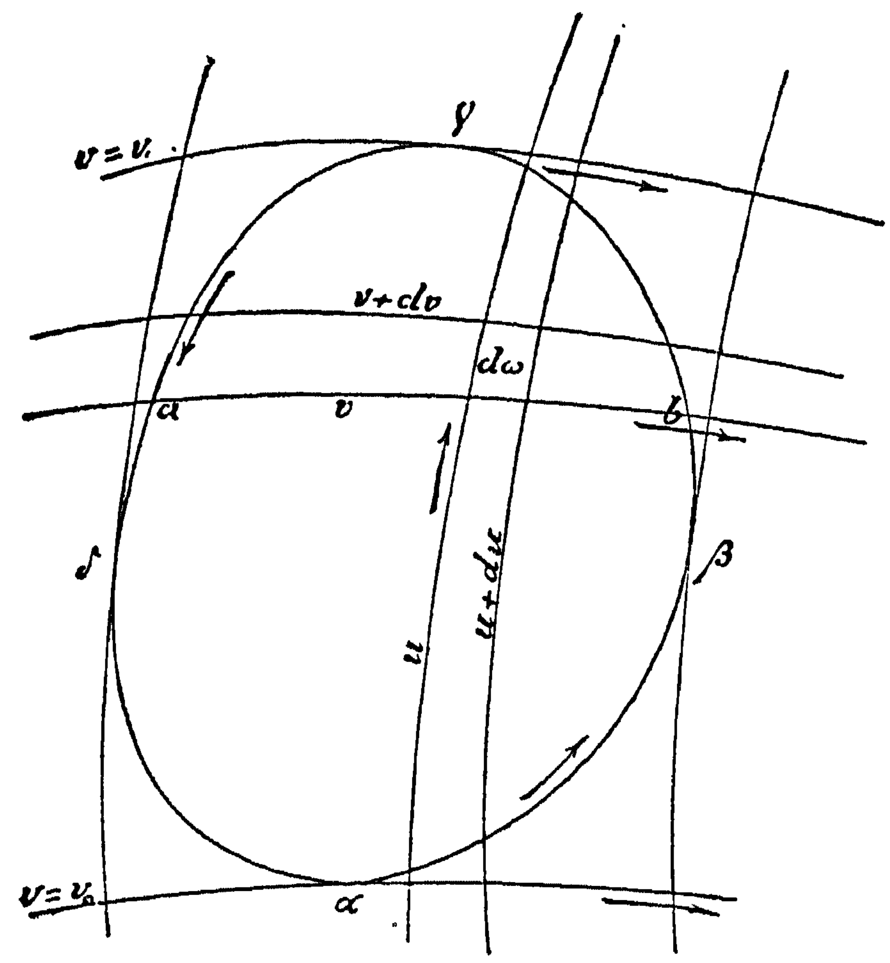
Per trasformare agevolmente questo integrale duplicato si ponga, per brevità,

$$M_\psi = \frac{G \dfrac{\partial \psi}{\partial u} - F \dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{H}, \qquad N_\psi = \frac{E \dfrac{\partial \psi}{\partial v} - F \dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{H},$$

e si avrà

$$\Pi = \int\int\left(M_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + N_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)du\,dv = \int\int M_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du\,dv + \int\int N_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial v}du\,dv.$$

Consideriamo un valore determinato di v, e quindi una linea particolare del si-



stema $v =$ cost., e siano $u = a$, $u = b$ i valori di u corrispondenti ai due punti nei quali il contorno dell'area ω è incontrato da questa linea ($b > a$). Per formare l'integrale $\int\int M_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du\,dv$ esteso ai limiti noti, bisognerà integrar dapprima rispetto ad u, supposto v uguale al valore fissato, ed estendere questa integrazione fra $u = a$ ed $u = b$. Per l'ammessa continuità delle derivate della funzione φ si avrà così, integrando per parti,

$$\int_a^b M_\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du = (M_\psi\varphi)_{u=b} - (M_\psi\varphi)_{u=a} - \int_a^b\frac{\partial M_\psi}{\partial u}\varphi\,du.$$

Le coordinate u, v di un punto qualunque del contorno si possono evidentemente riguardare come funzioni monodrome, finite e continue dell'arco s del suo perimetro, contato da un punto determinato nel senso che si adotta abitualmente come positivo, cioè tale che la normale *interna* sia disposta rispetto alla tangente *positiva* come la tangente positiva di una curva v lo è rispetto a quella di una curva u. Poichè dv è quantità che nell'integrazione si deve riguardare come positiva, si avrà dunque

nel punto a:

$$dv = -\left(\frac{dv}{ds}\right)ds,$$

nel punto b:

$$du = + \left(\frac{du}{ds}\right) ds,$$

ds essendo sempre quantità positiva: quindi dall'ultima formola ottenuta si potrà ricavare

$$\int\int M_\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} du\, dv = \int \left(M_\psi \varphi \frac{dv}{ds}\right)_a ds_a + \int \left(M_\psi \varphi \frac{dv}{ds}\right)_b ds_b - \int\int \frac{\partial M_\psi}{\partial u} \varphi\, du\, dv.$$

Il primo integrale del secondo membro deve manifestamente essere esteso alla serie dei punti analoghi ad a, cioè a tutto l'arco $\gamma\delta\alpha$; il secondo, alla serie dei punti analoghi a b, cioè a tutto l'arco $\alpha\beta\gamma$: conseguentemente la loro somma equivale all'integrale unico

$$\int M_\psi \varphi \frac{dv}{ds} ds,$$

esteso lungo tutto il perimetro, percorso nel senso positivo. Dunque si ha la formola

$$\int\int M_\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} du\, dv = \int M_\psi \varphi \left(\frac{dv}{ds}\right) ds - \int\int \frac{\partial M_\psi}{\partial u} \varphi\, du\, dv,$$

nella quale i due integrali duplicati sono estesi a tutta l'area ω, e l'integrale semplice a tutto il contorno, percorso nel senso positivo.

Procedendo analogamente per l'altra parte dell'integrale II, si trova

$$\int\int N_\psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} du\, dv = -\int N_\psi \varphi \left(\frac{du}{ds}\right) ds - \int\int \frac{\partial N_\psi}{\partial v} \varphi\, du\, dv,$$

e quindi, sommando membro a membro,

$$\text{II} = \int \left[M_\psi \left(\frac{dv}{ds}\right) - N_\psi \left(\frac{du}{ds}\right)\right] \varphi\, ds - \int\int \left(\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v}\right) \varphi\, du\, dv.$$

Ma si ha

$$\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v} = H . \Delta_2 \psi, \qquad H\, du\, dv = d\omega,$$

quindi

$$\text{II} = \int \left[M_\psi \left(\frac{dv}{ds}\right) - N_\psi \left(\frac{du}{ds}\right)\right] \varphi\, ds - \int\int \varphi . \Delta_2 \psi . d\omega .$$

L'integrale semplice può assumere una forma più comoda. Infatti, pei valori di M_ψ, N_ψ si ha

$$M_\psi \frac{dv}{ds} - N_\psi \frac{du}{ds} = \frac{1}{H} \left[\left(F \frac{du}{ds} + G \frac{dv}{ds}\right) \frac{\partial \psi}{\partial u} - \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}\right) \frac{\partial \psi}{\partial v}\right].$$

Ora se s'indicano con δu, δv gli incrementi che ricevono u e v passando dal punto (u, v) del contorno ad un punto infinitamente vicino nella direzione normale interna all'area, e con δn la distanza di questi due punti, si ha, (art. II),

$$\frac{E du + F dv + i H dv}{ds} = -i \frac{E\delta u + F\delta v + i H \delta v}{\delta n},$$

$$\frac{F du + G dv + i H du}{ds} = i \frac{F\delta u + G\delta v + i H \delta u}{\delta n},$$

donde

$$(21) \quad \begin{cases} E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds} = H\dfrac{\delta v}{\delta n}, & F\dfrac{du}{ds} + G\dfrac{dv}{ds} = -H\dfrac{\delta u}{\delta n}, \\ E\dfrac{\delta u}{\delta n} + F\dfrac{\delta v}{\delta n} = -H\dfrac{dv}{ds}, & F\dfrac{\delta u}{\delta n} + G\dfrac{\delta v}{\delta n} = H\dfrac{du}{ds}. \end{cases}$$

Di qui si trae

$$M_\psi \frac{dv}{ds} - N_\psi \frac{du}{ds} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta n} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta n}\right) = -\frac{\delta \psi}{\delta n},$$

e quindi finalmente

$$(22) \qquad -\Pi = \int \varphi \frac{\delta\psi}{\delta n} . ds + \int\int \varphi . \Delta_2 \psi . d\omega,$$

formola in cui l'integrale duplicato è esteso a tutta l'area ω e l'integrale semplice a tutto il contorno (il quale ora non è più vincolato a dover essere percorso in un senso determinato, perchè nella funzione da integrare non figura più l'arco s finito).

Se si fosse considerata la funzione ψ al posto della φ, e reciprocamente, si sarebbe trovato, in modo analogo,

$$(22') \qquad -\Pi = \int \psi \frac{\delta\varphi}{\delta n} ds + \int\int \psi . \Delta_2 \varphi . d\omega;$$

confrontando i due risultati si ottiene quindi

$$(23) \qquad \int\int (\varphi . \Delta_2 \psi - \psi . \Delta_2 \varphi) d\omega + \int \left(\varphi \frac{\delta \psi}{\delta n} - \psi \frac{\delta \varphi}{\delta n}\right) ds = 0,$$

formola molto importante, la quale esprime, rispetto alle superficie riferite a coordinate curvilinee qualunque, il teorema correlativo di uno notissimo rispetto allo spazio di tre dimensioni riferito a coordinate ordinarie.

Questa formola rimane così dimostrata per un'area ω soggetta alle restrizioni suenunciate. Ma se si imagina che una formola analoga venga scritta per ciascuna

delle aree ω in cui fu suddivisa l'area Ω' col mezzo delle trasversali Λ', facendo la somma di tutti i risultati, spariscono gli integrali lineari relativi alle trasversali, poichè ciascun d'essi figura due volte, con segno contrario, in causa dell'opposta direzione della normale n. Si ottiene dunque una formola di eguale aspetto, relativa all'intiera area Ω'. Anche la formola (22) è evidentemente suscettibile di un'eguale estensione.

All'equazione (23) si può pervenire altresì nel modo seguente.

Consideriamo una delle aree elementari ω, ed una funzione w, monodroma, finita e continua in tutti i punti di essa. Nelle ipotesi già fatte precedentemente si ha

$$\int \frac{\partial w}{\partial u} du = w_b - w_a,$$

$$\int\int \frac{\partial w}{\partial u} du\, dv = \int w_b\, dv_b - \int w_a\, dv_a = \int w \left(\frac{dv}{ds}\right) ds,$$

ed analogamente

$$\int\int \frac{\partial w}{\partial v} du\, dv = -\int w \left(\frac{du}{ds}\right) ds,$$

formole nelle quali gli integrali duplicati sono estesi a tutta l'area ω, gli integrali semplici al suo contorno, percorso nel senso positivo. In luogo di queste formole si possono, per le (21), scrivere le seguenti:

$$\int\int \frac{\partial w}{\partial u} du\, dv = -\int \left(E\frac{\delta u}{\delta n} + F\frac{\delta v}{\delta n}\right) \frac{w}{H} ds,$$

$$\int\int \frac{\partial w}{\partial v} du\, dv = -\int \left(F\frac{\delta u}{\delta n} + G\frac{\delta v}{\delta n}\right) \frac{w}{H} ds,$$

più simmetriche, benchè meno semplici, e nelle quali gli integrali lineari sono indipendenti dal modo in cui viene percorso il contorno. Si ponga ora:

nella prima formola

$$w = \varphi M_\psi - \psi M_\varphi,$$

nella seconda

$$w = \varphi N_\psi - \psi N_\varphi,$$

valori i quali suppongono monodrome, finite e continue non solo le funzioni φ e ψ, ma anche le loro derivate prime, che entrano nelle M, N. Sommando i risultati ed osservando che si ha

$$\frac{\partial(\varphi M_\psi - \psi M_\varphi)}{\partial u} + \frac{\partial(\varphi N_\psi - \psi N_\varphi)}{\partial v} = \left(\frac{\partial M_\psi}{\partial u} + \frac{\partial N_\psi}{\partial v}\right)\varphi - \left(\frac{\partial M_\varphi}{\partial u} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial v}\right)\psi$$
$$= H(\varphi \,.\, \Delta_2 \psi - \psi \,.\, \Delta_2 \varphi),$$

ed inoltre che

$$EM_\varphi + FN_\varphi = H\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad FM_\varphi + GN_\varphi = H\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

si ritrova immediatamente l'equazione (23).

Questo processo non conduce, come il già usato, alla formola (22) che è interessante a conoscersi. È però facile ricavare questa formola dalla (23). Infatti scriviamo dapprima quest'ultima come segue:

$$\int\!\!\int \varphi\,.\,\Delta_2\psi\,.\,d\omega + \int \varphi\frac{\delta\psi}{\delta n}\,ds = \int\!\!\int \psi\,.\,\Delta_2\varphi\,.\,d\omega + \int \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\,ds\,. \tag{24}$$

Poi osserviamo che dalla stessa (23), per $\varphi = 1$, $\psi = w$, si deduce

$$\int\!\!\int \Delta_2 w\,.\,d\omega + \int \frac{\delta w}{\delta n}\,ds = 0\,. \tag{24'}$$

È lecito porre in questa formola $w = \varphi\,.\,\psi$, onde s'ottiene

$$\int\!\!\int (\varphi.\Delta_2\psi + \psi.\Delta_2\varphi + 2\Delta_1\varphi\psi)\,d\omega + \int\left(\varphi\frac{\delta\psi}{\delta n} + \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds = 0,$$

ossia

$$-\int\!\!\int \Delta_1\varphi\psi.d\omega = \frac{1}{2}\left(\int\!\!\int \varphi.\Delta_2\psi.d\omega + \int \varphi\frac{\delta\psi}{\delta n}\,ds\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int\!\!\int \psi.\Delta_2\varphi.d\omega + \int \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\,ds\right).$$

Ma in virtù della (24) le due espressioni componenti il secondo membro sono eguali fra loro; quindi si può, in luogo della loro somma, scrivere il doppio dell'una o dell'altra. In tal modo si ricade appunto sulla formola (22) o sulla (22').

Quando $\varphi = \psi$ dalla (22) si ha

$$-\int\!\!\int \Delta_1\varphi.\,d\omega = \int\!\!\int \varphi.\,\Delta_2\varphi.\,d\omega + \int \varphi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\,ds, \tag{25}$$

equazione nella quale è importante il notare che gli elementi $\Delta_1\varphi.d\omega$ del primo integrale duplicato sono tutti essenzialmente positivi, in forza del significato che ha il primo parametro differenziale della funzione φ (art. I). Su questa proprietà si appoggia la dimostrazione delle note proprietà delle funzioni φ che rendono $\Delta_2\varphi = 0$, mediante l'uso del principio di Dirichlet, come si suol fare per il piano.

VI.

Supponiamo che la funzione ψ dell'art. prec. diventi, in un certo punto O, infinita come $\log\frac{1}{r}$, essendo r la distanza geodetica di questo punto da un punto qualunque della superficie; e propriamente ammettiamo che, per distanze geodetiche sufficientemente piccole, si abbia

$$\psi = \log\frac{1}{r} + r^{\nu} Q,$$

dove ν è un esponente maggiore di zero e Q una quantità che, per $r = 0$, non diventa nè nulla nè infinita (a meno che non sia sempre uguale a 0), e che in generale dipende dalle coordinate del punto cui corrisponde il valore di ψ che si considera.

Se il punto O è interno all'area Ω', il teorema (23) non può più essere applicato a quest'area; ma diventa applicabile all'area che si ottiene togliendo ad Ω' una porzione, piccola quanto si vuole, circostante al punto O. Riterremo che questa porzione sia limitata da una circonferenza geodetica di raggio r piccolissimo, col centro nel punto O. In tale ipotesi la formola (23) continuerà a sussistere, purchè si aggiungano al suo primo membro i termini seguenti:

$$-\int\int(\varphi.\Delta_2\psi - \psi.\Delta_2\varphi)\,d\omega' + \int\left(\varphi\frac{\delta\psi}{\delta n'} - \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n'}\right)ds',$$

dove $d\omega'$, dn', ds' fanno l'ufficio di $d\omega$, dn, ds relativamente all'area ed al contorno del piccolo cerchio geodetico.

Per calcolare il valore della precedente espressione conviene ricorrere ad una forma dell'elemento lineare appropriata al caso attuale, cioè alla forma

$$ds^2 = dr^2 + R^2 d\varepsilon^2, \tag{27}$$

che risulta dall'assumere come curve coordinate le linee geodetiche divergenti dal punto O e le circonferenze geodetiche che hanno il centro nel medesimo punto: r è la lunghezza di un arco di geodetica contato da O, ε è l'angolo che una delle geodetiche, presa come origine, fa con una qualunque delle altre. In queste condizioni è facile vedere che R è generalmente della forma

$$R = r(1 + r^{\mu} P),$$

dove μ è un esponente maggiore di zero e P una funzione di r e di ε che, per

$r=0$, non diventa nè nulla nè infinita *). Si ha poi

$$d\omega' = R\,dr\,d\varepsilon, \qquad dn' = dr, \qquad ds' = R\,d\varepsilon,$$

epperò l'espressione da calcolarsi, ritenuta continua la funzione φ e le sue derivate, diventa

$$-\overline{\varphi}\int\!\!\int R.\Delta_2\psi.dr\,d\varepsilon + \overline{\Delta_2\varphi}\int\!\!\int R\psi\,dr\,d\varepsilon + \overline{\varphi}\int R\frac{\partial\psi}{\partial r}d\varepsilon - \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial r}}\int R\psi\,d\varepsilon,$$

dove $\overline{\varphi}$, $\overline{\Delta_2\varphi}, \ldots$ sono certi valori medî delle funzioni φ, $\Delta_2\varphi, \ldots$ convenientemente scelti fra quelli che queste funzioni prendono entro i limiti degli integrali donde sono levate fuori.

Ora osserviamo che:

1°) Avendosi, per la forma (27) dell'elemento lineare,

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)\right],$$

e ψ avendo la forma (26), se si pone per brevità

$$(1+r^\mu P)\left(-1+\nu r^\nu Q + r^{\nu+1}\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+1 = K, \qquad \frac{1}{1+r^\mu P}\frac{\partial Q}{\partial\varepsilon} = K_1,$$

si trova

$$\Delta_2\psi = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial K}{\partial r} + r^{\nu-1}\frac{\partial K_1}{\partial\varepsilon}\right].$$

Di qui, moltiplicando per $R\,dr\,d\varepsilon$ ed integrando fra i limiti 0 ed r, 0 ed ε, si deduce

$$\int\!\!\int R.\Delta_2\psi.dr.d\varepsilon = \int_0^\varepsilon K\,d\varepsilon + \frac{1}{\nu}\int_0^r K_1\,d(r^\nu) - \frac{1}{\nu}\int_0^r K_1^0\,d(r^\nu),$$

dove K_1^0 è il valore di K_1 per $\varepsilon=0$. Ora, in virtù del valore di K, è evidente che l'integrale relativo ad ε può essere decomposto in più integrali simili, ciascuno dei quali è moltiplicato per una potenza *positiva* di r. Quanto ai due integrali relativi ad r^ν, è chiaro che chiamando c e c^0 i valori numericamente più grandi che le quantità K_1, K_1^0 assumono fra i limiti 0 ed r, gli integrali stessi rimangono numericamente minori delle due quantità $\frac{c\,r^\nu}{\nu}$ e $\frac{c^0 r^\nu}{\nu}$ rispettivamente. Di qui si conclude che

*) GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* art. XIX. Il caso di $P=0$, cioè di $R=r$, non si verifica che per le superficie applicabili sopra un piano.

l'integrale

$$\int\int R.\Delta_2\psi.dr.d\varepsilon$$

converge verso zero per $r = 0$, e ciò qualunque sia il limite superiore ε della integrazione relativa ad ε. Lo stesso ha luogo quando Q è sempre uguale a 0, cioè quando $\psi = \log\frac{1}{r}$.

2°) La quantità

$$R\psi = (1 + r^{\mu}P).r\log\frac{1}{r} + r^{\nu+1}(1 + r^{\mu}P)Q,$$

converge a zero quando r diventa evanescente; quindi, per tutti i valori di r inferiori ad un certo limite, essa si mantiene numericamente minore di una quantità ρ, la quale si annulla con r. Dunque il valor numerico degli integrali

$$\int\int R\psi\,dr\,d\varepsilon, \qquad \int R\psi\,d\varepsilon,$$

estesi fra 0 ed r, e tra 0 ed ε, è rispettivamente minore di

$$\rho r\varepsilon, \qquad \rho\varepsilon,$$

epperò ambedue gli integrali si annullano con r.

3°) Rammentando l'espressione poc'anzi indicata con K, si ha

$$R\frac{\partial\psi}{\partial r} = K - 1,$$

e quindi

$$\int_0^{\varepsilon} R\frac{\partial\psi}{\partial r}d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} K\,d\varepsilon - \varepsilon;$$

poichè dunque si è veduto già che $\int_0^{\varepsilon} K\,d\varepsilon$ converge verso zero per $r = 0$, si riconosce immediatamente che, per lo stesso valore di r, si ha

$$\int_0^{\varepsilon} R\frac{\partial\psi}{\partial r}d\varepsilon = -\varepsilon.$$

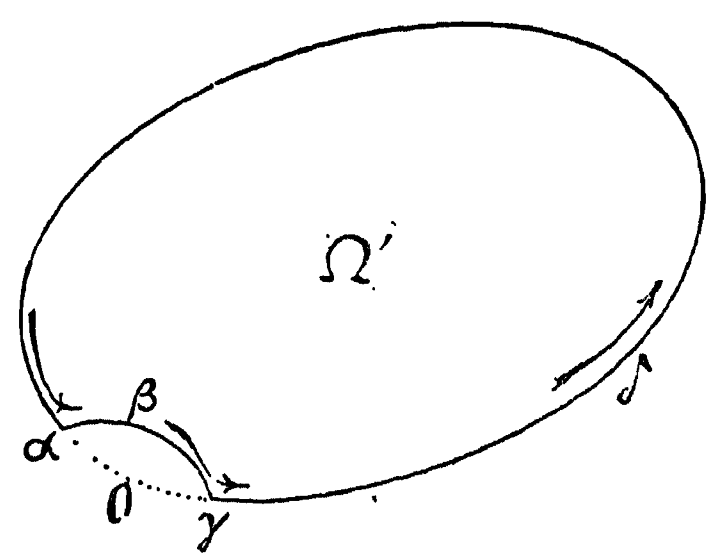
Se si raccolgono le proprietà qui notate dei varii integrali che compongono l'espressione di cui si cercava il valore, nella quale le integrazioni relative ad ε andavano estese fra 0 e 2π, si vede subito che, per r evanescente, quell'espressione converge verso il valore $-2\pi\varphi_0$, essendo φ_0 il valore che riceve la funzione φ nel punto O.

In conseguenza si ha la formola

$$(28) \qquad 2\pi\varphi_0 = \int\int(\varphi.\Delta_2\psi - \psi.\Delta_2\varphi)d\omega + \int\left(\varphi\frac{\delta\psi}{\delta n} - \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds,$$

purchè la funzione ψ abbia il carattere suindicato in un punto O dell'area Ω' alla quale si estendono le integrazioni, e quindi, in particolare, quando $\psi = \log\frac{1}{r}$.

Se il contorno dell'area Ω' passasse pel punto O, singolare per la funzione ψ, converrebbe scansarlo descrivendo intorno ad esso come centro un arco di cerchio



geodetico, di raggio piccolissimo, $\alpha\ \beta\ \gamma$, e sostituendo questo arco alla porzione $\alpha\ \gamma$ di contorno che comprende il punto O. L'arco anzidetto avrà l'ampiezza di $180°$ quando O sarà un punto ordinario del contorno, ed avrà un'ampiezza ε differente da $180°$ se O sarà un punto angoloso del contorno stesso. In quest'ultimo caso si trova immediatamente, colla scorta delle precedenti osservazioni, che al posto della (28) si ha la formula

$$(29) \qquad \varepsilon\varphi_0 = \int\int(\varphi.\Delta_2\psi - \psi.\Delta_2\varphi)d\omega + \int\left(\varphi\frac{\delta\psi}{\delta n} - \psi\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)ds,$$

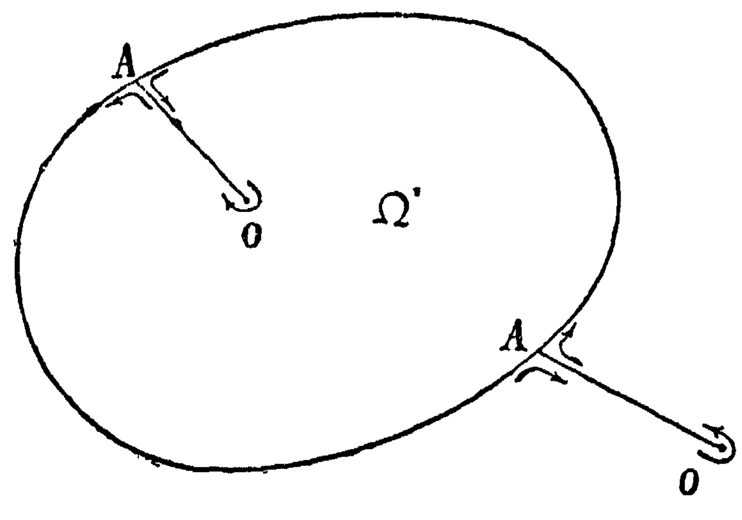
dove l'integrale duplicato si riferisce all'area contenuta entro il contorno $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$, e l'integrale semplice al contorno medesimo, omesso l'elemento nel quale si trova il punto O. Si troverebbe un eguale risultato descrivendo un piccolo arco esteriormente all'area, e prendendo quindi le mosse dall'equazione (28) anzichè dalla (23).

Per $\varphi = 1$ le (28), (29) dànno

$$(30) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\int\Delta_2\psi\,d\omega + \int\frac{\delta\psi}{\delta n}ds = 2\pi, \\ \displaystyle\int\int\Delta_2\psi\,d\omega + \int\frac{\delta\psi}{\delta n}ds = \varepsilon, \end{cases}$$

secondo che il punto O, dove la funzione ψ diventa infinita, è interno all'area Ω',

ovvero situato in un punto del contorno in cui due elementi contigui fanno l'angolo ε. È facile vedere che questo ultimo caso è il generale, ed abbraccia quello del punto



interno e del punto esterno. Infatti, in queste due ultime ipotesi, si può aggiungere al primitivo contorno una linea che vada da un punto A del contorno stesso al punto O e che ritorni poscia sopra sè stessa a raggiungere nel punto A il contorno: con ciò non si alterano nè gli integrali d'area, nè quelli di contorno. Ma considerando questa linea doppia come facente parte del contorno, è chiaro che l'angolo, *interno* all'area, dei due elementi sovrapposti che terminano in O, è uguale a o quando O è esterno all'area, ed uguale a 2π quando O è interno. Ciò vale anche per la (29).

È utile fare la seguente osservazione circa il valore dell'esponente positivo μ, che figura nel valore di R. Il prodotto reciproco dei due raggi di curvatura principali è dato, come si sa, dalla formola

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = -\frac{r^{\mu-2}}{1+r^\mu P}\left[\mu(\mu+1)P + 2(\mu+1)r\frac{\partial P}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right],$$

quindi il suo valore per $r = 0$, cioè nel punto O, è *nullo, finito od infinito* secondo che μ è maggiore, uguale o minore di 2. Quando dunque l'esponente μ, positivo, è minore di 2, la superficie non ha nel punto O una curvatura ordinaria.

La formola (28) esprime, rispetto alle superficie, un teorema analogo a quello di Green per lo spazio di tre dimensioni.

VII.

Poichè il binomio $\varkappa(U du + V dv)$ dev'essere un differenziale esatto, si deve avere

$$\frac{\partial(\varkappa U)}{\partial v} = \frac{\partial(\varkappa V)}{\partial u},$$

ossia

$$U\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - V\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v}. \tag{31}$$

Ponendo in questa equazione, ed in quella che se ne ottiene moltiplicandola per V', i valori (4) di U, V, V', si trovano le due formole equivalenti

$$E\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - (F + iH)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} = \quad WU,$$

$$G\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - (F - iH)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} = - WV',$$

dove per brevità si è posto

$$W = \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v}.$$

Le precedenti due equazioni si possono scrivere come segue:

$$\frac{G\dfrac{\partial \log \varkappa}{\partial u} - F\dfrac{\partial \log \varkappa}{\partial v}}{H} = - i\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - \frac{WV'}{H},$$

$$\frac{E\dfrac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - F\dfrac{\partial \log \varkappa}{\partial u}}{H} = \quad i\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u} + \frac{WU}{H},$$

donde si deduce, rammentando l'espressione della funzione $\Delta_2 \log x$ (art. I),

$$(32) \qquad \Delta_2 \log \varkappa = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{WV'}{H}\right)\right],$$

equazione notevolissima, in quanto manifesta che il valore della funzione $\Delta_2 \log \varkappa$ può essere ottenuto mediante le sole quantità E, F, G, che caratterizzano l'elemento lineare della superficie, insieme colle loro derivate.

Chiamando k il modulo della funzione $\varkappa$, si deduce dalla precedente equazione, calcolando la parte reale del secondo membro,

$$(33)\ \Delta_2 \log k = -\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right]\right\},$$

formola nella quale si riconosce l'espressione data da LIOUVILLE per la misura della curvatura. Abbiamo già mostrata la ragione d'essere di questo risultato *).

Consideriamo un'area Ω' nella quale k si mantenga finita e maggiore di zero:

---

*) Citate *Ricerche d'analisi applicata alla geometria*, art. XXIV.

applicando ad essa la formola (24'), dopo avervi posto $w = \log k$, si trova

$$\int\int \Delta_2 \log k . d\omega = -\int \frac{\delta \log k}{\delta n} ds .$$

Il primo membro non è che la *curvatura integra* o *totale* della porzione Ω' di superficie: denominandola Γ', si ha quindi

$$\Gamma' = -\int \frac{\delta \log k}{\delta n} ds , \tag{34}$$

formola nella quale l'integrale del secondo membro è esteso a tutto il contorno dell'area considerata.

Bisogna osservare che, mercè questa formola, le aree sferiche Γ', che secondo la teoria di GAUSS servono a misurare la curvatura totale, ricevono un segno determinato. Infatti l'elemento dell'integrale doppio Γ' è $\frac{d\omega}{R_1 R_2}$, essendo R_1 ed R_2 i due raggi principali di curvatura della superficie, e quindi l'elemento stesso è positivo o negativo secondo che i due raggi anzidetti hanno la stessa direzione o direzioni contrarie: quindi l'area sferica Γ' risulta generalmente formata dalla somma algebrica di più parti aventi segni diversi. Ne consegue che più porzioni contigue di superficie possono avere, separatamente considerate, una curvatura finita, mentre il loro complesso potrà avere una curvatura totale nulla.

La quantità $\frac{\delta \log k}{\delta n}$ è suscettibile di una trasformazione notevole. Chiamando $\frac{1}{\rho}$ la curvatura geodetica di una linea qualunque s tracciata sulla superficie, il cui elemento lineare è della forma

$$\frac{dp^2 + dq^2}{k^2}$$

(forma che conviene appunto, pel significato di k, alla superficie da noi considerata), si ha da formole note *)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2} - \frac{dq}{ds}\frac{d^2p}{ds^2}\right) + \frac{\partial \log k}{\partial q}\frac{dp}{ds} - \frac{\partial \log k}{\partial p}\frac{dq}{ds} .$$

Ma, (21),

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\delta q}{\delta n}, \qquad \frac{dq}{ds} = -\frac{\delta p}{\delta n},$$

quindi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{dp}{ds}\frac{d^2q}{ds^2} - \frac{dq}{ds}\frac{d^2p}{ds^2}\right) + \frac{\delta \log k}{\delta n} .$$

*) Citate *Ricerche di analisi applicata alla geometria,* art. XXI.

Chiamiamo η l'angolo che l'arco s fa colla curva u, ed avremo evidentemente

$$\frac{dp}{ds} = k\cos\eta\,, \qquad \frac{dq}{ds} = k\,\mathrm{sen}\,\eta\,,$$

donde

$$\frac{dp}{ds}\frac{d^2 q}{ds^2} - \frac{dq}{ds}\frac{d^2 p}{ds^2} = k^2\frac{d\eta}{ds}\,;$$

dunque

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\eta}{ds} + \frac{\delta \log k}{\delta n}\,. \tag{35}$$

Questa formola dà a ρ il segno positivo od il negativo, secondo che ρ è diretto nel senso di δn od in senso contrario.

Chiamando $d\tau$ l'angolo di contingenza geodetica, cioè ponendo

$$d\tau = \frac{ds}{\rho}\,,$$

si deduce, dalla precedente, questa relazione

$$-\frac{\delta \log k}{\delta n}\,ds = d\eta - d\tau,$$

dunque, sostituendo nella (34),

$$\Gamma' = \mathrm{E} - \mathrm{T}\,, \tag{36}$$

dove E e T sono le somme, relative a tutto il contorno s, degli angoli $d\eta$ e $d\tau$ corrispondenti a questo contorno stesso.

Per determinare con sicurezza queste somme in tutti i casi, conviene far in modo che in nessun punto del contorno gli angoli $d\eta$, $d\tau$ sieno finiti, cioè conviene togliere i punti angolosi del contorno, se ve ne sono, sostituendovi delle piccole curve d'*accordo*, che tolgano le discontinuità dell'angolo η e impediscano al raggio ρ di essere nullo in qualche punto. Quanto all'angolo τ è bene osservare che, in virtù della convenzione circa il segno di ρ, i suoi elementi infinitesimi $d\tau$ sono positivi o negativi, secondo che le due geodetiche, tangenti consecutive al contorno, dalle quali sono formati, si incontrano esternamente od internamente all'area Ω'. Supporremo anche, in quel che segue, che quest'area sia semplicemente connessa.

La somma $\int d\eta = \mathrm{E}$ si eseguisce agevolmente. Infatti dividiamo dapprima l'area Ω', come nell'art. V, in un certo numero di pezzi ω, ciascuno dei quali abbia il proprio contorno attraversato in due soli punti dalle curve u. Sieno $v = v_0$, $v = v_1$, le due curve u entro le quali è racchiuso uno di questi pezzi (vedi la figura dell'art. V). Nel punto di contatto α colla prima curva l'angolo η è nullo, e da questo punto, va-

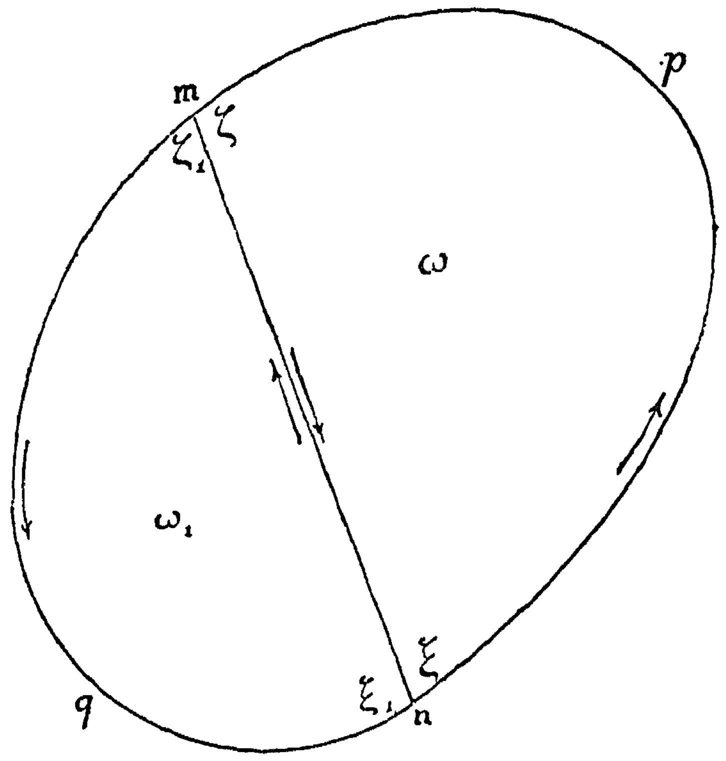
riando uniformemente, va ad acquistare il valore π nel punto di contatto γ colla seconda; poscia cresce da π a 2π, quando si ritorna per δ al primitivo punto α. Dunque per questo pezzo la somma in discorso è 2π, epperò, chiamando T_ω la somma algebrica degli angoli di contingenza geodetica, si ha per esso

$$\Gamma'_\omega = 2\pi - T_\omega .$$

Per un secondo pezzo si avrà analogamente

$$\Gamma'_{\omega_1} = 2\pi - T_{\omega_1} ;$$

e così di seguito.



Ora torniamo a ricongiungere i varii pezzi ω, ω_1, ecc., per il che basterà considerare il risultato della congiunzione di due pezzi ω, ω_1 aventi in comune una parte mn del loro contorno. Chiamiamo T'_ω, T'_{ω_1} le parti di T_ω, T_{ω_1} relative alle curve npm, mqn rispettivamente, e t quella relativa alla trasversale mn, parte che è comune ai due contorni, ma con segno contrario. Si avrà

$$T_\omega = T'_\omega + t + \xi + \zeta , \qquad T_{\omega_1} = T'_{\omega_1} - t + \xi_1 + \zeta_1 ,$$

quindi

$$T_\omega + T_{\omega_1} = T'_\omega + T'_{\omega_1} + 2\pi = T_{\omega+\omega_1} + 2\pi .$$

Ne risulta che, sommando le due formole precedentemente ottenute, si ha

$$\Gamma'_{\omega+\omega_1} = 2\pi - T_{\omega+\omega_1} ,$$

formola analoga alle anzidette, ma relativa al complesso delle due parti ω ed ω_1. Così continuando si trova finalmente

$$\Gamma' = 2\pi - T , \tag{37}$$

dove T è la somma di tutti gli angoli di contingenza geodetica relativi al contorno

dell'area Ω'. (Donde si conclude eziandio che, nelle condizioni ammesse circa alla disposizione delle curve coordinate, si ha in ogni caso, per un contorno chiuso, $E = 2\pi$).

La proprietà espressa dalla equazione precedente è stata indicata, sotto forma un po' diversa, dal sig. BONNET *).

Se il contorno è un poligono geodetico, sono nulle, nella somma T, tu relative ai lati successivi di esso, e non rimangono che quelle dovute alle r d'accordo che abbiam detto doversi sostituire agli angoli del poligono, c mane che la somma delle deviazioni di ciascun lato sul precedente. Chiamando que Δ queste deviazioni, si ha

$$\Gamma' = 2\pi - \sum \Delta,$$

formola che esprime un celebre teorema di GAUSS **).

Se la superficie è riferita ad un sistema di coordinate geodetiche r ed ε, come si suppone nell'art. precedente, in prossimità del punto O, dal quale divergono le geodetiche, l'espressione dell'elemento lineare si può scambiare colla seguente

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varepsilon^2,$$

per la quale il modulo k del fattore d'integrazione $\varkappa$ può porsi uguale ad $\frac{1}{r}$. Ne risulta che la funzione $\log k$ diventa, in questo caso, infinita in O come $\log \frac{1}{r}$. Se dunque si suppone che il punto O sia nell'interno dell'area Ω', bisogna sostituire la formola

$$\Gamma' = \int\int \Delta_2 \log k . d w = 2\pi - \int \frac{\delta \log k}{\delta n} d s$$

[dedotta dalla prima delle (30)] a quella da cui siamo partiti per istabilire la (37). Si trova così

$$\int \frac{\delta \log k}{\delta n} d s = T,$$

mentre, nelle ipotesi ammesse precedentemente, si aveva

$$\int \frac{\delta \log k}{\delta n} d s = T - 2\pi.$$

Di qui si conclude l'interessante proprietà che: l'integrale $\int \frac{\delta \log k}{\delta n} d s$, esteso ad un

---

*) Journal de l'École Polytechnique, t. XXIV, cahier 41 (1865), pag. 209.

**) *Disquisitiones generales*, etc., art. XX.

contorno chiuso, è uguale a $T - 2\pi$, oppure a T, secondo che il punto in cui la funzione k diventa infinita come $\frac{1}{r}$, è interno od esterno all'area chiusa da quel contorno.

Nel piano, riferito a coordinate polari ordinarie, si ha $k = \frac{1}{r}$, $T = 2\pi$, quindi la proprietà precedente fornisce, come caso particolare, il teorema, facilissimo a verificarsi, che: se r è la distanza di un punto fisso del piano da un punto variabile lungo un contorno chiuso, l'integrale $\int \frac{\delta \log r}{\delta n} ds$ esteso a questo contorno, è uguale a 0 oppure uguale a 2π, secondo che il punto fisso è esterno od interno all'area limitata dal contorno.

Un caso particolare interessante della formola (37) si ottiene supponendo che la curva s sia una di quelle dotate della proprietà di contenere, sotto un dato perimetro, la massima area, o di avere, per una data area racchiusa, il minimo perimetro. È noto infatti che per queste curve la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ è dovunque costante, e che quindi $T = \frac{s}{\rho}$, essendo s il perimetro totale: dunque si ha, per la curvatura totale dell'area racchiusa,

$$\Gamma' = 2\pi - \frac{s}{\rho}. \tag{38}$$

Il valore della curvatura totale può anche essere espresso facilmente per un integrale lineare, dipendente dalle sole E, F, G e loro derivate. Si ponga infatti, per brevità,

$$\frac{1}{2H}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right) = Q, \qquad \frac{1}{2H}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right) = P,$$

e la (33) diverrà

$$\Delta_2 \log k = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right).$$

Quindi, moltiplicando per $d\omega = H\,du\,dv$, ed integrando al modo che si è fatto verso la fine dell'art. V, si troverà

$$\Gamma' = \int (P\,du + Q\,dv), \tag{39}$$

dove l'integrale del secondo membro è esteso alla curva chiusa che limita la porzione di superficie di cui Γ' è la curvatura totale.

Si connette con questa espressione di Γ' una trasformazione notevole che può

essere effettuata sulla quantità $\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n}$. Si ha infatti

$$\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} = \frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta n} + \frac{\partial \log \varkappa}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta n},$$

ossia, per le (21),

$$H\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} = \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - \left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}.$$

Ma essendo, per le (4),

$$E = U^2, \qquad F = \frac{U(V+V')}{2}, \qquad G = VV', \qquad \frac{iH}{U} = \frac{V-V'}{2},$$

a questa equazione si può dare la forma seguente:

$$H\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} = \left(U\frac{\partial \log \varkappa}{\partial v} - V\frac{\partial \log \varkappa}{\partial u}\right)\left(U\frac{du}{ds} + V'\frac{dv}{ds}\right) + iH\frac{d \log \varkappa}{ds},$$

quindi, (31),

$$\frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} ds = \frac{W(U du + V' dv)}{H} + i.d \log \varkappa, \tag{40}$$

formola che contiene la trasformazione alla quale alludevamo. (La caratteristica d serve sempre a designare spostamenti nel senso dell'arco s, mentre la δ indica spostamenti normali).

Da essa si deduce, integrando lungo una curva chiusa qualunque,

$$\int \frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} ds = \int \frac{W(U du + V' dv)}{H} + i \int d \log \varkappa.$$

Ma se questa curva è il contorno già considerato nella formola (34), nell'interno del quale abbiamo supposto che $k = \mathrm{mod}\, \varkappa$ non diventasse mai uguale a 0, è chiaro che neppure $\varkappa$ diventerà zero in esso, epperò si avrà $\int d \log \varkappa = 0$, e quindi

$$\int \frac{\delta \log \varkappa}{\delta n} ds = \int \frac{W(U du + V' dv)}{H}.$$

Eguagliando le parti reali dei due membri di questa equazione, si ricade, per la (34), sulla (39).

Bologna, Dicembre 1867.

XXII.

ANNOTAZIONI SULLA TEORIA DELLE CUBICHE GOBBE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie seconda, vol. I (1868), pp. 130-137, 407-419.

1. Il seguente metodo per la trattazione algebrica di queste curve importantissime sembrerebbe raccomandarsi per la simmetria delle formole a cui conduce.

Prendo l'equazione

$$\frac{x}{a+u}+\frac{y}{b+u}+\frac{z}{c+u}=1, \tag{1}$$

la quale rappresenta un piano, riferito a tre assi obliqui. Le quantità a, b, c sono costanti, u è un parametro variabile. A ciaschedun valore di u corrisponde un piano unico ed individuato, che determina sui tre assi i segmenti $a+u$, $b+u$, $c+u$, donde si scorge che le sue intersezioni coi tre assi medesimi generano tre punteggiate eguali. Uno dei piani del sistema è il piano all'infinito, e corrisponde ad $u=\infty$. Per ogni punto dello spazio passano tre piani (reali od immaginarj), e, detti u, u_1, u_2 i parametri dei tre piani passanti pel punto (x, y, z), si hanno le formole

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{(a+u)(a+u_1)(a+u_2)}{(a-b)(a-c)}, \\ y&=\frac{(b+u)(b+u_1)(b+u_2)}{(b-c)(b-a)}, \\ z&=\frac{(c+u)(c+u_1)(c+u_2)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

affatto simili a quelle che si trovano nella teoria delle coordinate ellittiche. Ma, mentre in questa teoria i tre parametri u sono sempre reali e diseguali, nel caso presente possono invece diventare immaginarj od anche eguali. L'eguaglianza di due parametri interviene quando il punto (x, y, z) appartiene ad una delle rette d'intersezione di due piani infinitamente vicini, cioè quando il detto punto esiste sulla superficie sviluppabile formata dai piani del sistema; fatto dunque $u_2 = u_1$, le formole

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{(a+u)(a+u_1)^2}{(a-b)(a-c)}, \\ y &= \frac{(b+u)(b+u_1)^2}{(b-c)(b-a)}, \\ z &= \frac{(c+u)(c+u_1)^2}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \right.$$

rappresentano la detta superficie sviluppabile, esprimendo le coordinate della stessa in funzione di due parametri indipendenti. L'eguaglianza di tutti tre i parametri si verifica quando il punto (x, y, z) appartiene allo spigolo di regresso della superficie sviluppabile ora considerata, poichè ivi si segano tre piani consecutivi del sistema; dunque, fatto $u = u_1 = u_2$, le formole

$$(4) \quad x = \frac{(a+u)^3}{(a-b)(a-c)}, \quad y = \frac{(b+u)^3}{(b-c)(b-a)}, \quad z = \frac{(c+u)^3}{(c-a)(c-b)},$$

rappresentano la curva gobba che costituisce il detto spigolo di regresso, dandone le tre coordinate in funzione di un parametro indipendente.

I punti comuni a questa curva ed al piano qualunque

$$(5) \qquad lx + my + nz + p = 0$$

sono dati dall'equazione

$$l(b-c)(a+u)^3 + m(c-a)(b+u)^3 + n(a-b)(c+u)^3 - p(b-c)(c-a)(a-b) = 0,$$

epperò sono in numero di tre (reali od immaginarj): dunque la curva rappresentata dalle formole (4) è una linea del terzo ordine a doppia curvatura. Questa linea è propriamente una parabola gobba, poichè ha uno dei suoi piani osculatori all'infinito; ma basta una trasformazione omografica per distruggere questo suo carattere, epperò le proprietà projettive che si riconoscono coll'ajuto delle formole precedenti sono estendibili a tutte le cubiche gobbe.

La sviluppabile (3) è della terza classe. L'ordine se ne riconosce facilmente osservando che, dei due parametri u ed u_1, il secondo è costante nei punti appartenenti ad

una medesima generatrice, che è la retta comune al piano (u_1) ed al piano contiguo, mentre il primo è costante nei punti d'intersezione della sviluppabile col suo piano tangente (u). Ora la curva luogo di questi punti sega il piano (5) nei punti dati dall'equazione

$$l(b-c)(a+u)(a+u_1)^2 + m(c-a)(b+u)(b+u_1)^2$$
$$+ n(a-b)(c+u)(c+u_1)^2 - p(b-c)(c-a)(a-b) = 0,$$

la quale, per $u =$ cost., fornisce due valori di u_1: dunque quella curva è una conica, e, riunita colla generatrice (u), che tien luogo di due rette coincidenti, dà in totale una intersezione del quart'ordine. Concludesi pertanto che la sviluppabile è di quart'ordine e di terza classe. Si può osservare anche che dalle (3) si trae

$$a + u_1 = \sqrt{\frac{(a-b)(a-c)x}{a+u}},$$

$$b + u_1 = \sqrt{\frac{(b-c)(b-a)y}{b+u}},$$

$$c + u_1 = \sqrt{\frac{(c-a)(c-b)z}{c+u}},$$

donde, moltiplicando per $b-c$, $c-a$, $a-b$ e sommando,

$$\sqrt{\frac{(b-c)x}{a+u}} + \sqrt{\frac{(c-a)y}{b+u}} + \sqrt{\frac{(a-b)z}{c+u}} = 0,$$

equazione di un cono di 2° ordine inscritto nei tre piani coordinati, il quale è segato dal piano (u) secondo la conica testè considerata.

La retta tangente la cubica (4) nel punto (u_1) è rappresentata dalle equazioni (3), ritenuto u_1 costante ed u variabile. Il piano osculatore della cubica nello stesso punto u_1 è rappresentato dalla (1) per $u = u_1$.

2. È facile riconoscere il legame che sussiste fra il precedente metodo e quello di cui si è servito il signor professore CREMONA nelle prime sue pubblicazioni sull'attuale argomento. Infatti, mettiamo l'equazione (1) sotto la forma

$$(1') \qquad u^3 + 3Pu^2 + 3Qu + R = 0,$$

e si avrà manifestamente, chiamando come prima u, u_1, u_2 le tre radici dell'equazione (1) corrispondenti ad un determinato sistema di valori delle x, y, z, epperò delle P, Q, R,

$$(5') \quad -3P = u + u_1 + u_2, \quad 3Q = uu_1 + uu_2 + u_1u_2, \quad -R = uu_1u_2.$$

Quanto alle relazioni fra P, Q, R ed x, y, z, il confronto delle (1), (1′) dà

$$(6)\quad \begin{cases} 3P = a+b+c-(x+y+z), \\ 3Q = bc+ca+ab-[(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z], \\ R = abc-(bcx+cay+abz); \end{cases}$$

mentre, per converso, il confronto delle (2), (5′) dà

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a^3-3Pa^2+3Qa-R}{(a-b)(a-c)}, \\ y = \dfrac{b^3-3Pb^2+3Qb-R}{(b-c)(b-a)}, \\ z = \dfrac{c^3-3Pc^2+3Qc-R}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Poichè dunque le P, Q, R sono funzioni lineari delle x, y, z, nulla impedisce di riguardarle come coordinate rettilinee, e di surrogarle alle x, y, z. Allora le equazioni (5′) terranno luogo delle (2), rispetto a queste nuove coordinate. Così si otterranno le equazioni analoghe alle (3) facendo, nelle (5′), $u_2 = u_1$, e quindi la sviluppabile sarà rappresentata dalle formole

$$(3')\qquad -3P = u+2u_1, \qquad 3Q = 2uu_1+u_1^2, \qquad -R = uu_1^2,$$

nelle quali i parametri u ed u_1 hanno gli stessi significati di prima. Finalmente le equazioni della cubica gobba si otterranno, in coordinate P, Q, R, ponendo nelle precedenti formole $u_1 = u$, e saranno quindi

$$(4')\qquad -P = u, \qquad Q = u^2, \qquad -R = u^3.$$

Queste formole sono appunto quelle dalle quali è partito il signor CREMONA, e che MÖBIUS ha fatto conoscere per il primo. Eliminando u, u_1 fra le tre equazioni (3′), si ottiene

$$(3'')\qquad 3P^2Q^2-4P^3R+6PQR-4Q^3-R^2 = 0,$$

equazione della sviluppabile osculatrice. Il suo primo membro non è altro che il discriminante dell'equazione (1′). Sostituendo i valori (6), si avrebbe l'equazione della stessa superficie relativamente ai primitivi assi.

3. Sieno u', u'', u''' i valori di u relativi a tre determinati punti della cubica; si

indichino con analoghi accenti le loro coordinate P, Q, R. Affinchè il piano

$$r - 3qP + 3pQ - R = 0 \tag{8}$$

passi pei tre punti (u'), (u''), (u'''), bisogna, in virtù delle relazioni (4'), che l'equazione

$$u^3 + 3pu^2 + 3qu + r = 0$$

sia soddisfatta da $u = u'$, $u = u''$, $u = u'''$, e quindi bisogna, in virtù delle stesse (4'), che p, q, r sieno le coordinate P, Q, R del punto d'incontro dei piani osculatori nei tre punti considerati. In conseguenza di ciò, osservando che l'equazione (8) è verificata dal porre $P = p$, $Q = q$, $R = r$, si conclude primieramente un teorema di CHASLES, il quale consiste in ciò, che il piano passante per tre punti di una cubica gobba contiene il punto d'intersezione dei piani osculatori in questi punti. Ma, più generalmente, se ne conchiude che, rispetto ad una data cubica gobba, si verifica una legge di reciprocità fra punti e piani, poichè ad ogni punto dello spazio corrisponde un piano (determinato dai tre punti della cubica i cui piani osculatori passano pel primo), e reciprocamente; il punto è contenuto nel piano corrispondente; a punti posti in un piano corrispondono piani passanti per un punto contenuto in quel piano, ecc. Questa corrispondenza fu messa in luce da MÖBIUS, che la fondò sopra considerazioni di statica, e ne trasse interessanti conseguenze rispetto all'esistenza di tetraedri simultaneamente inscritti e circoscritti l'uno all'altro.

Ora mi propongo di dimostrare che una cubica gobba dà luogo ad un'altra reciprocità, che si può riguardare come di ordine superiore alla precedente, e che forse condurrebbe a risultati non meno interessanti della prima, specialmente se potesse, come non dubito, essere trattata colla pura geometria da chi sia più di me famigliare coi processi di questa fecondissima scienza.

Da quanto si è notato poc'anzi risulta doversi porre nella (8), per avere il piano (u', u'', u'''),

$$-3p = u' + u'' + u''', \quad 3q = u''u''' + u'''u' + u'u'', \quad -r = u'u''u'''.$$

Quindi, ponendo $u' = u$, $u''' = u''$, si otterrà il piano che passa per il punto (u) e per la generatrice (u'') della sviluppabile, piano la cui equazione può scriversi

$$(u''^2 + 2Pu'' + Q)u + Pu''^2 + 2Qu'' + R = 0. \tag{9}$$

Io ho cercato di determinare u in modo che questo piano passi per il punto di coordinate

$$x = \frac{(a+u_0)(a+u')^2}{(a-b)(a-c)}, \quad y = \frac{(b+u_0)(b+u')^2}{(b-c)(b-a)}, \quad z = \frac{(c+u_0)(c+u')^2}{(c-a)(c-b)},$$

cioè per il punto in cui la tangente alla cubica nel punto (u') è incontrata dal piano osculatore nel punto (u_0), ed ho trovato la relazione

$$(10)\qquad 2uu_0 + (u'' - 3u')u_0 + (u' - 3u'')u + 2u'u'' = 0.$$

Analogamente

$$(10')\qquad 2uu_0 + (u''' - 3u')u_0 + (u' - 3u''')u + 2u'u''' = 0$$

esprime la relazione necessaria acciocchè il piano passante per il punto (u) e per la generatrice (u''') contenga il punto di cui abbiamo scritte le coordinate. Se dunque dall'equazione (9) si elimina u colla (10), e se dall'equazione che si deduce dalla (9) cambiando u'' in u''' si elimina del pari u colla (10′), le due equazioni in P, Q, R che si ottengono, rappresentano i due piani condotti pel punto (x, y, z) e per le generatrici (u'') ed (u'''). Siccome poi il punto (x, y, z) è un punto qualunque della generatrice (u'), in causa del parametro u_0 che rimane arbitrario, così è chiaro che, eliminando questo parametro fra le due equazioni risultanti, si deve ottenere l'equazione del luogo geometrico di una retta che scorre simultaneamente sopra le tre generatrici (u'), (u''), (u'''), cioè l'equazione dell'iperboloide determinato da queste tre rette.

Avendo eseguito quest'eliminazione, sono pervenuto alla seguente equazione, nella quale p, q, r hanno i significati di poc'anzi:

$$(11)\left\{\begin{aligned}&18(prP^2 + p^2PR) + 18(qQ^2 + q^2Q) + 2(R^2 + r^2) - 12(pQR + qrP)\\&- 6(qRP + rpQ) - 9(rPQ + pqR) - 27pqPQ + 5rR = 0.\end{aligned}\right.$$

Ora quest'equazione presenta, come la (8), il carattere della reciprocità fra le coordinate P, Q, R e p, q, r, epperò se ne conchiude il seguente teorema: *chiamisi iperboloide corrispondente ad un punto dello spazio quello che è determinato dalle tre rette tangenti alla cubica nei punti i cui piani osculatori passano pel punto dato; e reciprocamente. Allora tutti gli iperboloidi corrispondenti a punti situati sopra uno stesso iperboloide determinato da tre tangenti della cubica passano per un solo e medesimo punto, che è il punto corrispondente a quest'ultimo iperboloide.*

Questo punto *non* si trova sull'iperboloide corrispondente; infatti, se nel primo membro della precedente equazione si fa $P = p$, $Q = q$, $R = r$, si trova per risultato l'espressione

$$-9(3p^2q^2 - 4p^3r + 6pqr - 4q^3 - r^2),$$

che è nulla solamente quando il punto (p, q, r) si trova sulla superficie rappresentata dall'equazione (3″), cioè sulla sviluppabile osculatrice, ossia, in altri termini, quando due dei parametri u', u'', u''' sono eguali fra loro; nel qual caso, propriamente parlando, non esiste più iperboloide.

Determiniamo l'intersezione dell'iperboloide (11) colla tangente alla cubica nel punto (u_0). Se le P, Q, R si riguardano come funzioni di u, u_1, u_2, è chiaro che nel cercato punto d'intersezione, dei tre parametri u, u_1, u_2, due avranno il valore u_0, e quindi, facendo $u_1 = u_2 = u_0$, si avrà

$$-3P = 2u_0 + u, \qquad 3Q = u_0^2 + 2uu_0, \qquad -R = u_0^2 u.$$

Facendo queste sostituzioni nella precedente equazione (11), si trova un risultato che è riducibile alla forma seguente:

$$(u_0^3 + 3pu_0^2 + 3qu_0 + r)[(u^2 + 2pu + q)u_0 + pu^2 + 2qu + r] = 0.$$

Ora il fattore

$$u_0^3 + 3pu_0^2 + 3qu_0 + r$$

è diverso da zero, finchè la generatrice (u_0) è distinta dalle (u'), (u''), (u'''), ciò che mostra al tempo stesso come quattro distinte tangenti della cubica non possano mai trovarsi sopra uno stesso iperboloide, poichè la precedente equazione dovrebbe risultare soddisfatta indipendentemente da u. Dunque i punti d'intersezione della tangente (u_0) coll'iperboloide (11) sono dati dall'equazione

$$(u^2 + 2pu + q)u_0 + pu^2 + 2qu + r = 0.$$

Ora, se in quest'equazione le quantità u, u_0 si riguardano come costanti, e le p, q, r come coordinate di un punto (nel sistema P, Q, R), l'equazione stessa rappresenta il piano tangente alla cubica nel punto (u) e passante pel punto (u_0), come risulta immediatamente dal suo confronto coll'equazione (9). Rammentando dunque il significato che avevano le p, q, r, se ne conclude che il piano in discorso deve contenere il punto (p, q, r), cioè il punto di concorso dei piani osculatori nei punti (u'), (u''), (u'''). Per tal modo ecco la costruzione semplicissima che fa trovare i punti d'intersezione dell'iperboloide (11) colla quarta tangente della cubica nel punto (u_0): pel punto nel quale s'incontrano i piani osculatori della cubica nei punti (u'), (u''), (u'''), o, più brevemente, pel punto corrispondente all'iperboloide considerato e pel punto (u_0) si facciano passare dei piani tangenti alla cubica in punti distinti da (u_0): questi piani sono due, perchè il piano tangente in (u_0) conta per due e la curva è di quarta classe (la sua sviluppabile osculatrice essendo di quart'ordine). I piani osculatori dei due punti di contatto così ottenuti intersecano la generatrice (u_0) nei punti cercati.

4. Riprendiamo la considerazione dell'iperboloide rappresentato dall'equazione (11) per mostrarne il legame colle interessanti proprietà delle figure *congiunte*, introdotte dal prof. CREMONA nella dottrina delle cubiche gobbe.

Per rendere più comoda la scrittura delle formole introduciamo coordinate omogenee, sostituendo $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, e $\frac{P}{N}$, $\frac{Q}{N}$, $\frac{R}{N}$ in luogo di p, q, r, e di P, Q, R; e poniamo

$$H = 18(prP^2 + nqQ^2 + p^2PR + q^2NQ) + 2(n^2R^2 + r^2N^2)$$
$$- 12(npQR + qrNP) - 6(nqPR + prNQ)$$
$$- 9(nrPQ + pqNR) - 27\,pqPQ + 5\,nrNR,$$

talchè sarà

$$H = 0$$

l'equazione dell'iperboloide determinato dalle 3 tangenti della cubica gobba nei punti i cui parametri sono le radici della equazione

$$(12) \qquad nu^3 + 3pu^2 + 3qu + r = 0,$$

cioè nei punti comuni alla cubica ed al piano rappresentato dall'equazione

$$(13) \qquad rN - 3qP + 3pQ - nR = 0.$$

Indicando con H_1 ciò che diventa il polinomio H quando vi si pone $N = n_1$, $P = p_1$, $Q = q_1$, $R = r_1$, l'equazione

$$\frac{\partial H_1}{\partial n_1}N + \frac{\partial H_1}{\partial p_1}P + \frac{\partial H_1}{\partial q_1}Q + \frac{\partial H_1}{\partial r_1}R = 0$$

rappresenta, come è notissimo, il piano polare del punto

$$(n_1, p_1, q_1, r_1)$$

rispetto all'iperboloide. Questo piano ha il suo fuoco nel punto le cui coordinate sono determinate dai rapporti

$$N:P:Q:R = 3\frac{\partial H_1}{\partial r_1} : -\frac{\partial H_1}{\partial q_1} : \frac{\partial H_1}{\partial p_1} : -3\frac{\partial H_1}{\partial n_1}.$$

Quando il punto di cui si prende il piano polare è quello stesso a cui corrisponde l'iperboloide $H = 0$ (vedi n° 3), cioè è il punto (n, p, q, r) fuoco del piano (13), le de-

rivate parziali del polinomio H assumono i seguenti valori speciali:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right) = 9\,(nr^2 + 2\,q^3 - 3\,pqr)\,,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = 3\cdot 9\,(2p^2r - pq^2 - nqr)\,,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 3\cdot 9\,(2\,nq^2 - p^2q - npr)\,,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) = 9\,(n^2r + 2\,p^3 - 3\,npq)\,.$$

Questi valori presentano la notevole proprietà che, designando con Δ il discriminante dell'equazione (12), cioè ponendo

$$\Delta = n^2r^2 + 4\,p^3r + 4\,nq^3 - 3\,p^2q^2 - 6\,npqr\,,$$

possono essere espressi colle formole

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right) = \frac{9}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial n}\,,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \frac{9}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial p}\,,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \frac{9}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial q}\,,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right) = \frac{9}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial r}\,,$$

talchè il piano polare del punto $(n,\ p,\ q,\ r)$ è dato dall'equazione

$$\frac{\partial \Delta}{\partial n}N + \frac{\partial \Delta}{\partial p}P + \frac{\partial \Delta}{\partial q}Q + \frac{\partial \Delta}{\partial r}R = 0\,. \tag{14}$$

Questa equazione manifesta che il piano così ottenuto è nel medesimo tempo il piano polare del punto (n, p, q, r) rispetto alla sviluppabile osculatrice della cubica gobba, superficie che è rappresentata, come sappiamo, dall'equazione omogenea

$$\Delta = 0.$$

Il fuoco $(n',\ p',\ q',\ r')$ di questo nuovo piano è individuato dai rapporti

$$n' : p' : q' : r' = 3\frac{\partial \Delta}{\partial r} : -\frac{\partial \Delta}{\partial q} : \frac{\partial \Delta}{\partial p} : -3\frac{\partial \Delta}{\partial n}\;;$$

e sostituendo nelle espressioni delle quattro derivate

$$\frac{\partial H'}{\partial n'}\,,\qquad \frac{\partial H'}{\partial p'}\,,\qquad \frac{\partial H'}{\partial q'}\,,\qquad \frac{\partial H'}{\partial r'}\,,$$

le quantità cui sono proporzionali le n', p', q', r', si trova

$$\frac{\partial H'}{\partial n'} : \frac{\partial H'}{\partial p'} : \frac{\partial H'}{\partial q'} : \frac{\partial H'}{\partial r'} = r : -3q : 3p : -n.$$

Dunque il piano polare del punto (n', p', q', r') rispetto alla iperboloide $H=0$ è quello rappresentato dall'equazione (13), ossia è di nuovo il piano passante pei punti di contatto della cubica gobba colle tre tangenti che determinano l'iperboloide $H=0$ (altrimenti detto il piano focale del punto cui corrisponde questo iperboloide).

Di quì risulta che il punto (n, p, q, r) insieme col suo piano focale (13) forma, rispetto all'iperboloide che gli corrisponde, una figura polare reciproca di quella composta del punto (n', p', q', r') e del suo piano focale (14). E conseguentemente la congiungente dei due punti e la comune sezione dei due piani sono due rette reciproche, tanto rispetto alla cubica, quanto rispetto all'iperboloide. Osserviamo ancora che i tre piani osculatori passanti per il punto (n, p, q, r) sono tangenti all'iperboloide, poichè ciascun d'essi contiene una sua generatrice: dunque il piano focale del punto (n', p', q', r') può riguardarsi come individuato dai punti di contatto dell'iperboloide coi piani osculatori nei tre punti comuni a questo ed alla cubica, epperò sega l'iperboloide secondo una conica che è inscritta nel triangolo formato dalle sue intersezioni coi detti tre piani osculatori.

Ora consideriamo la cosa da un altro aspetto. L'equazione (14) definisce, per ogni dato piano (13) (avente il fuoco nel punto di coordinate $n:p:q:r$), un certo altro piano, che si può riguardare come ad esso corrispondente. Abbiamo già notato che questo secondo piano non è altro che il piano polare del fuoco del primo, rispetto alla sviluppabile osculatrice. Ora il piano (14) è tale che, cercandone colla stessa legge il corrispondente, si ritrova di nuovo il primitivo piano (13). Infatti poniamo

$$r' = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial n}, \quad -3q' = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial p}, \quad 3p' = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial q}, \quad -n' = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta}{\partial r},$$

e rappresentiamo con Δ' ciò che diventa Δ quando le n, p, q, r si mutano nelle n', p', q', r'. Da un teorema di EISENSTEIN *), dimostrato e generalizzato dal prof. BRIOSCHI **), si ricava che le relazioni precedenti dànno luogo alle seguenti formole inverse:

$$\Delta^2.n = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta'}{\partial r'}, \quad -\Delta^2.3p = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta'}{\partial q'}, \quad \Delta^2.3q = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta'}{\partial p'}, \quad -\Delta^2.r = \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta'}{\partial n'},$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXVII (1844), pag. 105.

**) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche (del TORTOLINI), t. V (1854), pag. 409.

talchè

$$\frac{\partial\Delta'}{\partial n'}N+\frac{\partial\Delta'}{\partial p'}P+\frac{\partial\Delta'}{\partial q'}Q+\frac{\partial\Delta'}{\partial r'}R=-2\Delta^2(rN-3qP+3pQ-nR).$$

Dunque l'equazione del piano corrispondente al piano focale del punto (n', p', q', r'), la quale sarebbe

$$\frac{\partial\Delta'}{\partial n'}N+\frac{\partial\Delta'}{\partial p'}P+\frac{\partial\Delta'}{\partial q'}Q+\frac{\partial\Delta'}{\partial r'}R=0,$$

equivale alla (13), che rappresenta appunto il piano focale del punto (n, p, q, r).

Poichè la relazione sussistente fra i piani (13) e (14) è, rispetto alla cubica, di natura reciproca, riesce manifesto *a priori* che le proprietà polari testè riconosciute in essi relativamente all'iperboloide $H=0$, che corrisponde al fuoco del primo, devono verificarsi eziandio rispetto a quell'altro iperboloide $H'=0$, che corrisponde al fuoco del secondo, cioè che contiene le tre tangenti della cubica nei punti comuni a questa ed al secondo piano. Dunque il punto (n, p, q, r) col piano (13), ed il punto (n', p', q', r') col piano (14), formano due sistemi reciproci tanto rispetto alla cubica, quanto rispetto alla sua sviluppabile osculatrice, quanto rispetto ai due iperboloidi menzionati.

Esaminando le formole date dal prof. CREMONA nell'art. 5 delle sue ricerche *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura* *), si vede che i due piani (13) e (14) sono fra loro *congiunti* rispetto alla cubica; laonde, combinando le proprietà ritrovate dal medesimo autore con quelle che risultano da quanto precede, si giunge a nuove proprietà delle figure congiunte (fra le quali figure si potrebbero annoverare anche i due iperboloidi testè considerati).

Per esempio, si può osservare che, siccome la conica secondo cui un piano osculatore è segato dalla sviluppabile osculatrice passa per il punto di osculazione ed ha ivi la stessa tangente della cubica, così i tre poli di un piano qualunque rispetto alle coniche esistenti nei piani osculatori dei suoi tre punti d'intersezione colla cubica, sono i punti d'incontro delle tangenti alla cubica in questi stessi punti col piano congiunto al dato. Questi poli esistono dunque sui lati del triangolo secondo cui il piano congiunto è segato dai piani osculatori passanti per il fuoco del piano primitivo. Ma, per un teorema del signor CREMONA, la conica congiunta deve toccare in questi punti i lati del detto triangolo: dunque essa coincide colla conica secondo cui il piano congiunto sega l'iperboloide corrispondente al fuoco del piano primitivo, conica che vedemmo già essere inscritta in quel triangolo. Si ha quindi il teorema: *la conica congiunta ad un dato piano*

*) Annali di Matematica pura ed applicata, t. II (1859), pag. 22.

è l'intersezione dell'iperboloide corrispondente al fuoco di questo piano col piano polare del fuoco medesimo rispetto all'iperboloide.

In virtù di un altro teorema del prof. CREMONA, questa stessa proprietà ha luogo per un altro iperboloide, che è il luogo delle coniche congiunte a tutti i piani passanti per la retta d'intersezione di due piani osculatori. Ne risulta che: *gli iperboloidi corrispondenti ai varj punti di una corda della cubica sono tutti inscritti in un medesimo altro iperboloide, che è toccato da tutti i piani osculatori della cubica,* e che è quello considerato dal citato autore *).

*) A questa Nota seguono alcune considerazioni di carattere polemico, che non si crede opportuno di riprodurre. [N. d. R.].

XXIII.

SULLA TEORIA DELLE LINEE GEODETICHE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, vol. I (1868), pp. 708-718.

È noto che le mirabili scoperte di JACOBI sul nesso che vige fra le equazioni dinamiche, le equazioni isoperimetriche e le equazioni a derivate parziali del primo ordine non lineari, hanno ricevuto un'utile applicazione nella teoria delle linee geodetiche. Sebbene tale applicazione non presenti alcuna difficoltà per chi abbia conoscenza del nesso sovraccennato, tuttavia ci è sembrato che vi si verifichino alcune particolarità le quali, mancando di riscontro nella dottrina generale, rendono forse non inopportuna una dimostrazione speciale. Quella che segue presenta i caratteri della maggior semplicità.

Si abbia l'integrale

$$\int f(x,\, y,\, y')\,dx\,, \qquad y' = \frac{dy}{dx}\,, \tag{1}$$

il quale debba esser reso massimo o minimo. La equazione indefinita del problema o, come diremo più brevemente, la equazione isoperimetrica è per questo caso

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,,$$

vale a dire

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - y'\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0\,.$$

Supponiamo che si conosca un integral primo di questa equazione e quindi un valore

di y' in funzione finita di x, y. Immaginando sostituito questo valore nella data funzione

$$f(x, y, y'),$$

si trova facilmente che l'equazione isoperimetrica assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \tag{2}$$

dove si deve intendere sostituito nelle espressioni rinchiuse fra parentesi il valore di y' in funzione di x, y.

Ora si osservi che l'elemento dell'integrale, cioè la quantità

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx,$$

è una funzione omogenea e di primo grado dei differenziali

$$dx, \qquad dy,$$

talchè chiamando X, Y le derivate di essa rispetto a questi differenziali, si ha identicamente

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx = X dx + Y dy,$$

dove

$$X = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial y'};$$

quindi l'integrale proposto può assumere la forma

$$\int (X dx + Y dy).$$

Si ha così quest'interessante proprietà che, sostituendo nelle

$$X, \quad Y$$

il valore di y' dedotto da un integral primo del problema, l'equazione isoperimetrica prende la forma

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

cioè diventa la solita condizione d'integrabilità del differenziale a due variabili indipendenti in cui si è convertito l'elemento $f dx$.

Sia $F(x, y)$ la funzione primitiva, cioè sia

$$dF = \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dy; \tag{3}$$

si avrà

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y'}. \tag{3'}$$

La determinazione della funzione F non dipende, come si vede, che da una sola quadratura, ma si può trovar modo di determinare tal funzione senza supporre eseguita una prima integrazione dell'equazione indefinita. Infatti, eliminando dalle due precedenti equazioni la derivata y', si ottiene un risultato della forma

$$\Phi\left(x, \; y, \; \frac{\partial F}{\partial x}, \; \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0, \tag{4}$$

cioè un'equazione a derivate parziali del primo ordine non lineare, cui deve soddisfare la funzione F e che può quindi servire a determinarla. Siccome questa funzione non entra nell'equazione che colle sue derivate, così delle due costanti arbitrarie contenute in una soluzione completa, l'una è semplicemente additiva.

Se è noto un integral primo dell'equazione isoperimetrica, si ottiene, integrando la (3), una soluzione dell'equazione a derivate parziali (4), soluzione che è particolare o completa secondo che quell'integral primo è alla sua volta particolare o provveduto di costante arbitraria. Ma reciprocamente dalla conoscenza di una soluzione dell'equazione (4) si può ricavare facilmente, mediante una delle due equazioni (3'), il valore di y', cioè un integral primo dell'equazione isoperimetrica. Però la considerazione seguente è più feconda di risultati.

Se l'integral primo dell'equazione isoperimetrica contiene una costante arbitraria, è chiaro che al variare di questa costante il valore di y', ricavato dall'integrale stesso, riceve pure una variazione e che, per la (3), varia del pari in corrispondenza la funzione F. Segnando con D queste variazioni simultanee di y' e di F, la (3) dà

$$D\,dF = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy - y'.dx)\,Dy'. \tag{5}$$

Ne segue che, per

$$dy - y'.dx = 0,$$

si ha

$$D\,dF = 0,$$

ovvero

$$d\,DF = 0,$$

e quindi

$$DF = \text{cost.}, \tag{6}$$

equazione nella quale è lecito attribuire a D il significato di una derivazione rispetto alla costante arbitraria (non additiva) contenuta in F, la qual costante può essere indifferentemente tanto quella proveniente dall'integral primo, che ha servito a formare l'equazione (3), quanto quella contenuta in una soluzione completa della (4). Ora l'equazione (6), essendo finita rispetto alle x, y, e contenendo due costanti arbitrarie, non è altro che l'integrale della

$$dy - y'.dx = 0,$$

ossia l'integrale completo dell'equazione isoperimetrica *).

Da quanto precede risulta dunque che l'integrazione completa dell'equazione isoperimetrica (2) dipende sostanzialmente, sia dalla ricerca di un suo integral primo (con una costante arbitraria) e da una quadratura, sia dalla ricerca di una soluzione completa di un'equazione a derivate parziali del primo ordine non lineare, dove non entrano che le derivate della funzione incognita.

La forma in cui si presentano così queste proprietà, fatte già conoscere da JACOBI, le rende più direttamente applicabili alla teoria delle superficie.

Sia infatti

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare di una superficie. La ricerca delle linee geodetiche equivale a quella della relazione fra u, v, per la quale è minimo il valore dell'integrale

$$\int \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Chiamando U, V le derivate dell'elemento di questo integrale rispetto a du, dv, si ha

$$U = \frac{Edu + Fdv}{ds}, \qquad V = \frac{Fdu + Gdv}{ds},$$

epperò in questo caso l'equazione (2) diventa

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\delta u + F\delta v}{\delta s}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\delta u + G\delta v}{\delta s}\right),$$

*) È chiaro che la supposizione $DF =$ cost., e quindi $dDF = 0$, non può fornire che $dy - y'.dx = 0$, nell'equazione (5). Infatti, delle due quantità

$$Dy', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},$$

la prima evidentemente non può esser nulla, e la seconda non lo diventa che quando f è lineare rapporto ad y', caso nel quale, come è noto, non vi è luogo ad una vera soluzione del problema isoperimetrico.

dove δu, δv, δs indicano i valori di du, dv, ds relativi alla geodetica del sistema considerato, passante pel punto (u, v). Quando è dato l'integral primo che rappresenta il sistema stesso, è facile calcolare i valori di $\frac{\delta u}{\delta s}$, $\frac{\delta v}{\delta s}$ relativi a quella curva.

La precedente equazione, notevole per la sua semplicità, non è forse ancora stata messa in rilievo. Essa potrebbe però essere dedotta senza difficoltà da una formola del signor BONNET *); ed anche il signor CHELINI ne ha data una equivalente in una Memoria letta nel corrente anno (1868) all'Accademia di Bologna **).

Chiamando $\varphi(u, v)$ la funzione primitiva, precedentemente segnata con $F(x, y)$, si hanno, in luogo delle (3'), le equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{E\delta u + F\delta v}{\delta s}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{F\delta u + G\delta v}{\delta s},$$

donde, eliminando $\frac{\delta u}{\delta s}$, $\frac{\delta v}{\delta s}$ per formare l'equazione analoga alla (4), si ricava

$$\frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = 1,$$

cioè

$$\Delta_1 \varphi = 1, \tag{7}$$

secondo la segnatura già da noi più volte usata.

La funzione φ è suscettibile di un'interpretazione elegante. Infatti essendo

$$d\varphi = \frac{E\delta u + F\delta v}{\delta s}du + \frac{F\delta u + G\delta v}{\delta s}dv, \tag{8}$$

si vede che le curve rappresentate dall'equazione $\varphi =$ cost., ossia $d\varphi = 0$, soddisfanno alla relazione

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0,$$

la quale esprime, come è noto, l'ortogonalità delle direzioni corrispondenti ai due rapporti $du:dv$ e $\delta u:\delta v$. Dunque le anzidette curve $\varphi =$ cost. sono ortogonali alle geodetiche rappresentate dall'equazione integrale di primo ordine (per un determinato valore della costante arbitraria, se questa esiste nell'integrale, ovvero per un determinato sistema di valori delle costanti arbitrarie, se l'integrale stesso ne contiene di soprannumerarie). Di più, considerando due punti infinitamente vicini (u, v), $(u + du, v + dv)$,

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées (deuxième série), t. V (1860), pag. 166.

**) Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna (seconda serie), t. VIII. pag. 27.

e la corrispondente differenza $d\varphi$ dei valori del parametro φ, se quei punti sono situati sopra una medesima geodetica del sistema, si ha

$$du = \delta u, \qquad dv = \delta v,$$

e quindi

$$d\varphi = \delta s,$$

talchè $d\varphi$ non è altro che la distanza geodetica costante delle due trajettorie (φ) e $(\varphi + d\varphi)$ passanti per quei punti, e quindi φ è la distanza geodetica del punto (u, v) da una determinata trajettoria ortogonale del sistema geodetico considerato. Si può anche dire che le curve (φ) sono le sviluppanti geodetiche di quella curva alla quale sono tangenti tutte le geodetiche del sistema, ossia che formano un sistema di curve parallele fra loro geodeticamente; cosicchè se, per esempio, l'integral primo rappresentasse le geodetiche passanti per un punto fisso, le curve (φ) sarebbero le circonferenze geodetiche aventi il centro in questo punto ed il loro parametro φ non differirebbe che di una costante dal loro raggio geodetico.

Tutte queste proprietà si possono anche risguardare come contenute nella semplice equazione (7), a tenore di quanto è esposto nell'art. IV delle mie *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* *). L'equazione stessa era già stata data da GAUSS nel § XXII delle sue *Disquisitiones generales*... Se si parte da essa per determinare la funzione φ e si chiama k la costante arbitraria (non additiva) contenuta in una sua soluzione completa, basta porre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k} = \psi,$$

dove ψ è un parametro arbitrario, per avere, dietro quanto si è dimostrato, il sistema delle linee geodetiche cui corrispondono le trajettorie (φ). Ne segue che se dalle due equazioni

$$\varphi(u, v) = \varphi, \qquad \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial k} = \psi$$

si ricavassero i valori di u, v in funzione di φ, ψ, questi valori darebbero all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = d\varphi^2 + \Theta . d\psi^2,$$

Θ essendo funzione di φ, ψ **).

Nel problema speciale di cui ci occupiamo, il significato dell'equazione $D d\varphi = 0$

---

*) Giornale di Matematiche, vol. II (1864), pag. 277; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 115.

**) GAUSS, *Disquisitiones generales*..., XIX.

può riguardarsi come intuitivo. Consideriamo infatti due punti

$$M(u, v), \qquad M'(u + du, v + dv),$$

e le trajettorie

$$(\varphi), \qquad (\varphi + d\varphi)$$

passanti per essi, e sia M_1 l'intersezione della seconda trajettoria colla geodetica ortogonale passante per M. Questi punti formano un triangolo rettangolo in M_1, il cui cateto MM_1 ha per valore $d\varphi$. Il far variare la costante nell'espressione (8) equivale a tener ferma l'ipotenusa MM', variando la direzione del cateto MM_1. Ora egli è chiaro che la variazione di questo cateto è nulla (cioè d'ordine superiore al secondo) solamente quando la direzione di esso coincide con quella dell'ipotenusa, ossia quando il punto M' è situato sulla geodetica passante pel punto M. Il porre uguale a 0 quella variazione equivale dunque allo stabilire la relazione che ha luogo fra gli incrementi du, dv relativi alle geodetiche del sistema; ed il porre la equivalente relazione finita

$$D\varphi = \text{cost.}$$

equivale a scrivere l'equazione finita di queste linee.

La forma che assume la variazione $Dd\varphi$ per le linee geodetiche, particolarizzazione della (5), merita d'essere notata, ed è la seguente:

$$Dd\varphi = \frac{(EG - F^2)(\delta u . dv - \delta v . du)(\delta u . D\delta v - \delta v . D\delta u)}{\delta\varphi^3}.$$

Facciamo due applicazioni semplicissime.

1° Quando la superficie è di rotazione, chiamando u l'arco di meridiano contato da un parallelo determinato, v la longitudine, r (funzione di u) il raggio del parallelo, si ha

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2,$$

e l'equazione differenziale delle linee geodetiche ha il seguente integral primo

$$dv = \frac{r_0 du}{r\sqrt{r^2 - r_0^2}},$$

dove r_0 è la costante arbitraria. Questo integrale rappresenta tutte le geodetiche tangenti al parallelo di raggio r_0 ed è facilmente traducibile in un notissimo teorema dovuto a Clairaut. Partendo da questo integrale si trova

$$\varphi = \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}\, du}{r} + r_0 v,$$

equazione che rappresenta, in virtù di quanto precede, il completo sistema delle sviluppanti geodetiche del parallelo di raggio r_0, e dove il parametro φ è la lunghezza dell'arco compreso sul parallelo r_0 (al quale corrisponde il valore $u = u_0$) fra il punto di longitudine nulla e l'origine della sviluppante che passa per il punto (u, v).

2° In una Memoria inserita negli Annali di Matematica pura ed applicata *) abbiamo trovato che le superficie le cui linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari in u, v, si contengono tutte nella formola

$$ds^2 = \frac{(v^2 + a^2)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + (u^2 + a^2)\,dv^2}{(u^2 + v^2 + a^2)^2},$$

dove a è una costante. Cerchiamo la minima distanza di due punti (u, v), (u_0, v_0). L'equazione differenziale

$$\delta u : \delta v = u - u_0 : v - v_0$$

rappresenta evidentemente tutte le geodetiche uscenti dal punto (u_0, v_0). Partendo da questo integral primo e ponendo

$$u^2 + v^2 + a^2 = w^2, \qquad u_0^2 + v_0^2 + a^2 = w_0^2, \qquad uu_0 + vv_0 + a^2 = t,$$

si trova facilmente

$$d\varphi = -\frac{d\,\frac{t}{w}}{\sqrt{w_0^2 - \left(\frac{t}{w}\right)^2}},$$

donde

$$\cos\varphi = \frac{uu_0 + vv_0 + a^2}{\sqrt{(u^2 + v^2 + a^2)(u_0^2 + v_0^2 + a^2)}},$$

dove la costante è scelta in modo che si abbia $\varphi = 0$ per

$$u = u_0, \qquad v = v_0.$$

Il valore di φ dato da questa formola è quello della minima distanza cercata, e quindi, riguardando φ come un parametro, si ha l'equazione delle circonferenze geodetiche col centro nel punto (u_0, v_0) e col raggio geodetico uguale a φ.

Nel citato scritto abbiamo fatto vedere che le superficie a cui si riferiscono queste formole sono tutte applicabili sulla sfera di raggio 1, lo che, pel significato geometrico ivi assegnato alle variabili u, v, rende immediatamente ragione del risultato ottenuto. Ma il metodo quì usato non suppone minimamente la conoscenza di tali proprietà.

---

*) t. VII (1865), pag. 197; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 262.

XXIV.

SAGGIO DI INTERPETRAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA *).

Giornale di Matematiche, vol. VI (1868), pp. 284-312.

In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.

Questi concetti non sono di data recente. Il sommo GAUSS li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benchè nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di LOBATSCHEWSKY.

Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principî si incontrano non di rado nella storia dello scibile. Oggi poi essi sono un portato naturale dello spirito critico cui a buon dritto si vanno sempre più informando tutte le indagini scientifiche. Quando questi tentativi si presentano come frutto di investigazioni coscenziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin quì indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo. D'altronde nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso.

*) Una traduzione francese (dovuta ad HOÜEL) di questa Memoria trovasi nel periodico: « Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure », tome VI (1869), pp. 251-288. [N. d. R.].

Nè la critica profonda dei principî può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie.

Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di LOBATSCHEWSKY; e, seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibile di raggiungerlo in quanto al resto.

Il presente scritto è destinato principalmente a svolgere la prima di queste tesi; della seconda non daremo che un cenno sommario alla fine, solo perchè si possa più rettamente giudicare del significato inerente alla proposta interpetrazione.

Per non interrompere troppo spesso la nostra esposizione, abbiamo rimandato a note speciali, poste in fine, le dichiarazioni relative a certi risultati analitici sui quali dobbiamo appoggiarci.

Il criterio fondamentale di dimostrazione della geometria elementare è la *sovrapponibilità delle figure eguali.*

Questo criterio non è applicabile soltanto al piano, ma a tutte quelle superficie su cui possono esistere figure eguali in differenti posizioni, cioè a tutte quelle superficie di cui una porzione qualunque può essere adagiata esattamente, per via di semplice flessione, sopra una qualunque altra porzione della superficie stessa. Ognun vede infatti che la rigidezza delle superficie sulle quali le figure si concepiscono non è una condizione essenziale dell'applicazione di quel criterio, talchè p. es. non nuocerebbe all'esattezza delle dimostrazioni della geometria piana euclidea il concepirne le figure come esistenti sulla superficie di un cilindro o di un cono, anzichè su quella di un piano.

Le superficie per le quali si avvera incondizionatamente la proprietà anzidetta sono, in virtù di un celebre teorema di GAUSS, tutte quelle che hanno costante in ogni punto il prodotto dei due raggi di curvatura principale, ossia tutte quelle la cui curvatura sferica è costante. Le altre superficie non ammettono l'applicazione incondizionata del principio di sovrapposizione al confronto delle figure tracciate sovr'esse, e quindi queste figure non possono avere una struttura affatto indipendente dalla loro posizione.

L'elemento più essenziale delle figure e delle costruzioni della geometria elementare è la linea retta. Il carattere specifico di questa è d'essere completamente determinata da due soli dei suoi punti, talchè due rette non possono passare per due dati punti dello spazio senza coincidere in tutta la loro estensione. Però nella geometria piana questo

carattere non viene esaurito in tutta la sua latitudine, perchè, a ben guardare, la retta non è introdotta nelle considerazioni della planimetria che mercè il seguente *postulato:* facendo combaciare due piani su ciascuno dei quali esiste una retta, basta che le due rette si sovrappongano in due punti, perchè riescano sovrapposte in tutta la loro estensione.

Ora questo carattere, così circoscritto, non è peculiare alle linee rette rapporto al piano; esso sussiste eziandio (in generale) per le linee geodetiche di una superficie di curvatura costante rapporto a questa superficie. Una linea geodetica ha già sopra qualsivoglia superficie la proprietà di essere (generalmente parlando) determinata senza ambiguità da due dei suoi punti. Ma per le superficie di curvatura costante, e per queste sole, sussiste integralmente la proprietà analoga a quella della retta nel piano, cioè: se si hanno due superficie, la cui curvatura sia costante in ogni punto ed eguale in entrambe, e se su ciascuna di esse esiste una linea geodetica, facendo combaciare le due superficie in modo che le geodetiche si sovrappongano in due punti, esse riescono sovrapposte (generalmente) in tutta la loro estensione.

Ne consegue che, salvi quei casi nei quali questa proprietà va soggetta ad eccezioni, i teoremi che la planimetria dimostra, col mezzo del principio di sovrapposizione e del postulato della retta, per le figure formate sul piano da linee rette, sussistono altresì per le figure formate analogamente sopra una superficie di curvatura costante da linee geodetiche.

In ciò si fondano le molteplici analogie della geometria della sfera con quella del piano (alle rette di questo corrispondendo le geodetiche, cioè i cerchi massimi, di quella) analogie che i geometri hanno già notate da lungo tempo. Se altre analogie, di specie diversa ma di eguale origine, non sono state del pari notate prima d'ora, lo si deve ascrivere a ciò che il concetto di superficie flessibili ed applicabili le une sulle altre, non è diventato familiare che in questi ultimi tempi.

Abbiamo fatta allusione ad eccezioni che possono interrompere o limitare l'analogia ora discorsa. Queste eccezioni esistono realmente. Sulla superficie sferica p. es., due punti cessano di determinare senza ambiguità un cerchio massimo quando sono diametralmente opposti. Questa è la ragione per cui alcuni teoremi della planimetria non hanno i loro analoghi sulla sfera, come p. es. il seguente: due rette perpendicolari ad una terza non possono incontrarsi.

Queste riflessioni sono state il punto di partenza delle nostre presenti ricerche. Abbiamo incominciato col notare che le conseguenze di una dimostrazione abbracciano necessariamente l'intera categoria degli enti nei quali esistono tutte le condizioni necessarie alla sua legittimità. Se la dimostrazione è stata concepita in vista di una determinata categoria di enti, senza che in essa sieno state effettivamente introdotte quelle determinazioni che individuano la categoria stessa in confronto di una categoria più

estesa, è chiaro che le conseguenze della dimostrazione acquistano una generalità più grande di quella che si cercava. In questo caso può benissimo succedere che alcune di tali conseguenze sembrino inconciliabili colla natura degli enti specialmente contemplati, in quanto che certe proprietà che sussistono generalmente per una data categoria di enti possono modificarsi notabilmente od anche scomparire affatto per alcuni di essi in particolare. Se ciò avviene, i risultati della fatta investigazione presentano delle apparenti incongruenze, di cui la mente non può rendersi capace, se prima non siasi resa conscia della base troppo generale data alla sua investigazione.

Ciò premesso, consideriamo quelle dimostrazioni della planimetria che si fondano unicamente sull'uso del principio di sovrapposizione e sul postulato della retta, quali sono appunto quelle della planimetria non-euclidea. I risultati di queste dimostrazioni valgono incondizionatamente in tutti quei casi nei quali sussistono quel principio e quel postulato. Questi casi sono tutti necessariamente compresi, per quanto si è veduto, nella dottrina delle superficie di curvatura costante, ma non possono verificarsi che per quelle fra queste superficie, in cui non ha luogo alcuna eccezione alle ipotesi di quelle dimostrazioni. La sussistenza del principio di sovrapposizione non patisce eccezione per alcuna delle dette superficie. Ma rispetto al postulato della retta (o per meglio dire della geodetica) abbiamo già notato che si incontrano delle eccezioni sulla sfera, e per conseguenza su tutte le superficie di curvatura costante positiva. Ora queste eccezioni esistono anche sulle superficie di curvatura costante negativa? Vale a dire, può egli darsi il caso, su queste ultime superficie, che due punti non determinino una sola ed individuata linea geodetica?

Questa quistione non è, per quel ch'io sappia, ancora stata esaminata. Se si può provare che tali eccezioni non sono possibili, diventa evidente *a priori* che i teoremi della planimetria non-euclidea sussistono incondizionatamente per tutte le superficie di curvatura costante negativa. Allora certi risultati che sembravano incompatibili coll'ipotesi del piano possono diventar conciliabili con quella di una superficie della specie anzidetta, e ricevere da essa una spiegazione non meno semplice che sodisfacente. In pari tempo le determinazioni che producono il passaggio dalla planimetria non-euclidea alla euclidea possono spiegarsi con quelle che individuano la superficie di curvatura nulla nella serie delle superficie di curvatura costante negativa.

Tali sono le considerazioni che ci hanno servito di guida nelle ricerche seguenti.

La formola

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2 - u^2)\,dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2} \tag{1}$$

rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie la cui curvatura sferica

è dovunque costante, negativa ed eguale a $-\frac{1}{R^2}$. La forma di quest'espressione, benchè meno semplice di quella d'altre espressioni equivalenti che si potrebbero ottenere introducendo altre variabili, ha il particolare vantaggio (assai rilevante per lo scopo nostro) che ogni equazione lineare rispetto ad u, v rappresenta una linea geodetica, e che, reciprocamente, ogni linea geodetica è rappresentata da un'equazione lineare fra quelle variabili (Veggasi la Nota I in fine).

In particolare anche i due sistemi coordinati $u =$ cost., $v =$ cost. sono formati di linee geodetiche, delle quali è facile riconoscere la mutua disposizione. Infatti chiamando θ l'angolo delle due curve coordinate nel punto (u, v), si ha

$$(2)\qquad \cos\theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}\,, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}\,,$$

quindi tanto per $u = 0$, quanto per $v = 0$ si ha $\theta = 90^\circ$. Dunque le geodetiche componenti il sistema $u =$ cost. sono tutte ortogonali alla geodetica $v = 0$ dell'altro sistema, e le geodetiche del sistema $v =$ cost. sono tutte ortogonali alla geodetica $u = 0$ dell'altro sistema. Vale a dire: nel punto $(u = v = 0)$ concorrono due geodetiche ortogonali fra loro $u = 0$, $v = 0$, che diremo *fondamentali*, e ciascun punto della superficie viene individuato come intersezione di due geodetiche condotte per esso perpendicolarmente alle due fondamentali; ciò che costituisce una evidente generalizzazione dell'ordinario metodo cartesiano.

Le formole (2) fanno vedere che i valori ammissibili per le variabili u, v sono limitati dalla relazione

$$(3)\qquad u^2 + v^2 \leqq a^2.$$

Entro questi limiti le funzioni E, F, G sono reali, monodrome, continue e finite, e le E, G, $EG - F^2$ sono inoltre positive e differenti da zero. Dunque, per quel che abbiamo stabilito al principio della Memoria *Delle variabili complesse in una superficie qualunque* *), la porzione di superficie terminata al contorno d'equazione

$$(4)\qquad u^2 + v^2 = a^2\,,$$

è semplicemente connessa, ed il reticolo formato su di essa dalle geodetiche coordinate presenta intorno a ciascun punto il carattere di quello formato da due sistemi di rette parallele su di un piano, cioè: due geodetiche di egual sistema non hanno mai alcun punto comune, e due geodetiche di sistema diverso non sono mai fra loro tangenti. Ne consegue che, sulla regione considerata, a ciascuna coppia di valori reali delle u, v

*) Annali di Matematica (seconda serie), t. I (1867), pag. 329; oppure queste OPERE, pag. 318.

soddisfacenti alla condizione (3) corrisponde un punto reale, unico e determinato; e, reciprocamente, a ciascun punto corrisponde una sola e determinata coppia di valori reali delle u, v soddisfacenti alla condizione anzidetta.

Quindi se indichiamo con x, y le coordinate rettangolari dei punti di un piano ausiliare, le equazioni

$$x = u\,, \qquad y = v$$

stabiliscono una rappresentazione della regione considerata, rappresentazione nella quale a ciascun punto di quella regione corrisponde un punto unico e determinato del piano e reciprocamente; e tutta la regione trovasi rappresentata dentro un cerchio di raggio a col centro nell'origine delle coordinate, che chiamiamo *cerchio limite*. In questa rappresentazione le geodetiche della superficie sono rappresentate dalle corde del cerchio limite, ed in particolare le geodetiche coordinate sono rappresentate dalle corde parallele ai due assi coordinati.

Vediamo ora come sia limitata, sopra la superficie, la regione alla quale si applicano le precedenti considerazioni.

Una linea geodetica uscente dal punto ($u = 0\,,\ v = 0$) può essere rappresentata colle equazioni

$$(5) \qquad u = r \cos \mu\,, \qquad v = r \operatorname{sen} \mu\,,$$

dove r e μ sono le coordinate polari del punto corrispondente al punto (u, v) sulla retta che rappresenta (nel piano ausiliare) la geodetica considerata. Per tali valori si ricava dalla (1), essendo μ costante,

$$d\rho = R\,\frac{a\,dr}{a^2 - r^2}\,,$$

donde

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + r}{a - r}\,,$$

dove ρ è l'arco della geodetica, contato dal punto ($u = v = 0$). Si può scrivere anche

$$(6) \qquad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}\,,$$

u, v essendo le coordinate del secondo termine dell'arco ρ: il radicale $\sqrt{u^2 + v^2}$ deve prendersi qui positivamente, affine di ottenere il valore assoluto della distanza ρ.

Questo valore è nullo per $r = 0$, va crescendo indefinitamente col crescere di r, ossia di $\sqrt{u^2 + v^2}$, da 0 ad a, diventa infinito per $r = a$, ossia per quei valori di u, v che sodisfano alla (4), ed è immaginario quando $r > a$. È chiaro dunque che il contorno espresso dall'equazione (4) e rappresentato nel piano ausiliare dal cerchio limite,

non è altro che il luogo dei punti all'infinito della superficie, luogo che può considerarsi come un cerchio geodetico descritto col centro nel punto $(u = v = 0)$ e con un raggio (geodetico) infinitamente grande. Al di là di questo cerchio geodetico di raggio infinito non esistono che le regioni immaginarie od ideali della superficie, talchè la regione dianzi considerata si estende indefinitamente e continuamente in ogni senso ed abbraccia la totalità dei punti reali della superficie. In tal guisa dentro il cerchio limite viene a rappresentarsi tutta la regione reale della nostra superficie, e propriamente in modo che, mentre lo stesso cerchio limite corrisponde alla linea dei suoi punti all'infinito, i cerchi concentrici ed interni ad esso corrispondono ai cerchi geodetici della superficie col centro nel punto $(u = v = 0)$.

Se nelle equazioni (5) si riguarda r come costante, μ come variabile, quelle equazioni convengono ad un cerchio geodetico, e la formola (1) dà

$$\sigma = \frac{R r \mu}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \tag{7}$$

dove σ è l'arco di cerchio geodetico rappresentato nel piano ausiliare dall'arco circolare il cui raggio è r e l'angolo al centro μ. Essendo σ proporzionale a μ qualunque sia r, si vede facilmente che le geodetiche ρ fanno tra loro, nell'origine comune, angoli eguali ai raggi che loro corrispondono nel piano ausiliare; e che la piccolissima porzione di superficie immediatamente circostante al punto $(u = v = 0)$ è simile alla sua rappresentazione piana, proprietà che non si verifica per alcun altro punto.

Dalla (6) si trae

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \operatorname{tg h} \frac{\rho}{R}, \qquad \cos \mathrm{h} \frac{\rho}{R} = \frac{a}{w}, \tag{7'}$$

dove w indica il valore positivo del radicale $\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$. In virtù del precedente valore di r la (7) può scriversi

$$\sigma = \mu R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R},$$

cosicchè il semiperimetro della circonferenza geodetica di raggio ρ è dato da

$$\pi R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}, \tag{8}$$

ossia

$$\frac{1}{2} \pi R \left(e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}} \right).$$

Dalle cose precedenti risulta che le geodetiche della superficie sono rappresentate, nel loro totale sviluppo (reale), dalle corde del cerchio limite, mentre i prolungamenti di

queste corde fuori del cerchio stesso sono destituiti d'ogni rappresentanza (reale). D'altronde due punti reali della superficie sono rappresentati da due punti, parimente reali, interni al cerchio limite, i quali individuano *una* corda del cerchio stesso. Si vede dunque che due punti reali della superficie, *scelti in modo qualunque*, individuano sempre *una sola e determinata linea geodetica*, che è rappresentata nel piano ausiliare dalla corda passante pei loro punti corrispondenti.

Così le superficie di curvatura costante negativa *non* vanno soggette a quelle eccezioni che si verificano sotto questo rapporto in quelle di curvatura costante positiva, epperò sono ad esse applicabili i teoremi della planimetria non-euclidea. Anzi questi teoremi non sono in gran parte suscettibili di concreta interpetrazione, se non vengono riferiti precisamente a queste superficie anzichè al piano, come ora procediamo a diffusamente dimostrare. Per evitare circonlocuzioni ci permettiamo di denominare *pseudosferiche* le superficie di curvatura costante negativa, e di conservare il nome di *raggio* alla costante R da cui dipende il valore della loro curvatura.

Cerchiamo primieramente la relazione generale che sussiste fra l'angolo di due linee geodetiche e l'angolo delle corde che le rappresentano.

Sia (u, v) un punto della superficie, (U, V) un punto qualunque di una delle geodetiche uscenti da esso. Le equazioni di due fra queste geodetiche siano

$$V - v = m(U - u), \qquad V - v = n(U - u).$$

Chiamando α l'angolo delle geodetiche nel punto (u, v) si ha, da una formola nota,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(n-m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n+m)F + mnG},$$

ossia, pei valori attuali di E, F, G,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a(n-m)w}{(1+mn)a^2 - (v - mu)(v - nu)}.$$

Indicando con α' l'angolo delle due corde e con μ, ν gli angoli formati da esse coll'asse delle x, si ha $m = \operatorname{tg}\mu$, $n = \operatorname{tg}\nu$, $\alpha' = \nu - \mu$, e quindi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{aw \operatorname{sen}\alpha'}{a^2\cos\alpha' - (v\cos\mu - u\operatorname{sen}\mu)(v\cos\nu - u\operatorname{sen}\nu)}.$$

Il denominatore del secondo membro si mantiene sempre finito in ogni punto reale della superficie, quindi l'angolo α non può essere nullo che quando è nullo il numeratore. Ma $\operatorname{sen}\alpha'$ non è nullo finchè le due corde si intersecano dentro il cerchio

limite e non coincidono in una sola retta: dunque α non è nullo che per $w = 0$, cioè quando il punto in cui s'incontrano le due geodetiche è all'infinito.

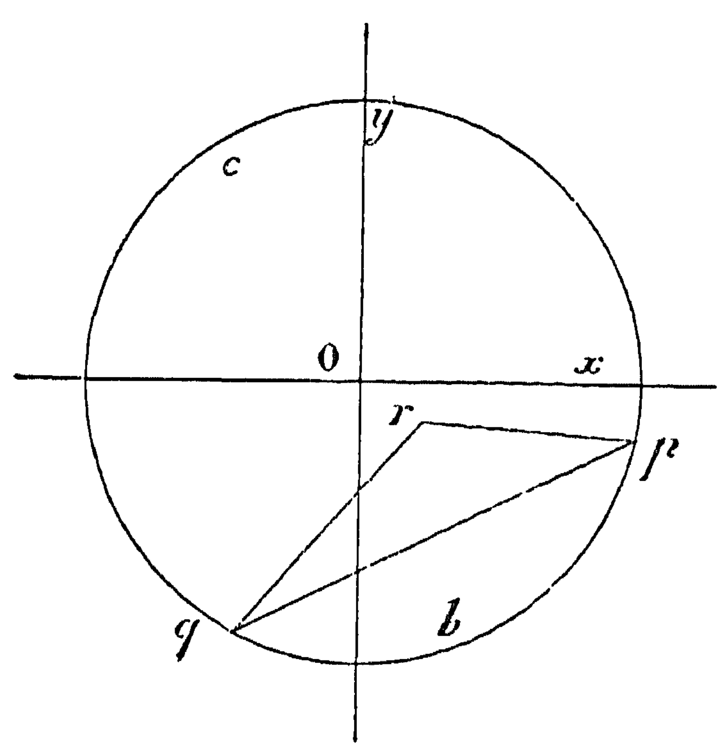
Conseguentemente possiamo formulare le regole seguenti:

I. A due corde distinte che s'intersecano dentro il cerchio limite corrispondono due geodetiche che si intersecano in un punto a distanza finita sotto un angolo differente da 0° e da 180°.

II. A due corde distinte che s'intersecano sulla periferia del cerchio limite corrispondono due geodetiche che concorrono verso uno stesso punto a distanza infinita e che fanno in esso un angolo nullo.

III. E finalmente a due corde distinte che s'intersecano fuori del cerchio limite, o che sono parallele, corrispondono due geodetiche che non hanno alcun punto comune su tutta l'estensione (reale) della superficie.

Sia ora $p\,q$ una corda qualunque del cerchio limite, r un punto interno al cerchio

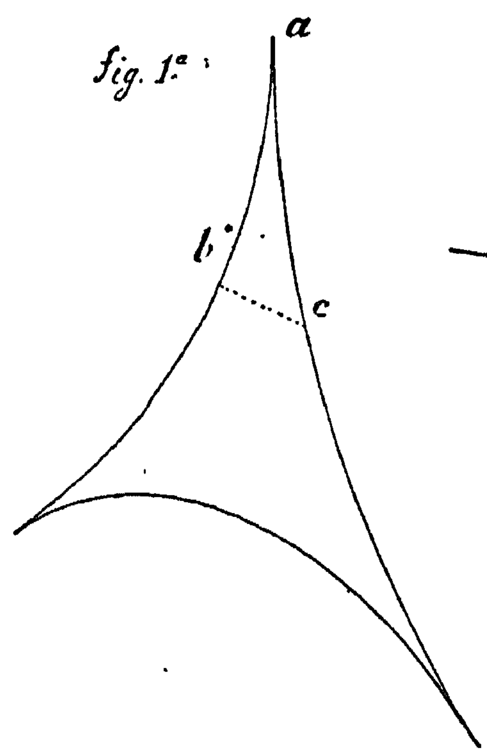


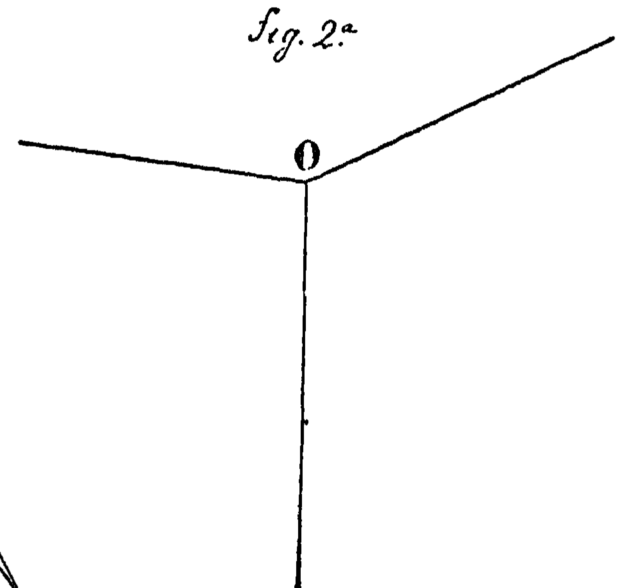
ma esterno alla corda. A questa corda corrisponde sulla superficie una geodetica $p'q'$, diretta verso i punti all'infinito p', q' (corrispondenti a p, q); al punto r corrisponde un punto r', situato a distanza finita ed esterno alla geodetica $p'\,q'$. Da questo punto si possono spiccare infinite geodetiche, delle quali alcune incontrano la geodetica $p'q'$, le altre non la incontrano. Le prime sono rappresentate dalle rette che vanno dal punto r ai varii punti dell'arco $p\,b\,q$ ($< 180°$), le altre sono rappresentate da quelle che vanno dallo stesso punto ai varii punti dell'arco $p\,c\,q$ ($> 180°$). Due geodetiche speciali formano il trapasso da quelle dell'una schiera a quelle dell'altra: sono quelle rappresentate dalle rette $r\,p$, $r\,q$, ossia sono le due geodetiche che partono da r' e concorrono all'infinito colla $p'\,q'$, l'una da una parte, l'altra dall'altra. Siccome gli angoli rettilinei $r\,q\,p$, $r\,p\,q$ hanno i loro vertici sulla periferia del cerchio limite, così (II) i corrispondenti angoli geodetici $r'q'p'$, $r'p'q'$ sono nulli, benchè i primi sieno finiti. All'incontro, essendo r interno al detto cerchio ed esterno alla corda $p\,q$, l'an-

golo prq è differente da 0° e da 180° e quindi (I) le geodetiche corrispondenti $r'p'$, $r'q'$ formano in r' un angolo pure differente da 0° e da 180°. Dunque se le geodetiche $r'p'$, $r'q'$ si dicono *parallele* alla $p'q'$, in quanto segnano il trapasso dalla schiera di quelle che intersecano la $p'q'$ alla schiera di quelle che non la intersecano, si può enunciare il risultato dicendo che: da ogni punto (reale) della superficie si possono sempre condurre *due* geodetiche (reali) parallele ad una medesima geodetica (reale) che non passi per quel punto, e queste due geodetiche fanno tra loro un angolo differente tanto da 0° quanto da 180°.

Questo risultato s'accorda, salva la diversità delle espressioni, con quello che forma il cardine della geometria non-euclidea. Per iscorgere subito, nella geometria pseudosferica, l'interpetrazione di qualche altra affermazione della geometria non-euclidea, consideriamo un triangolo geodetico. Ognuno sa che quando si studiano figure esistenti sopra una superficie la quale non sia sviluppabile sopra un piano, riesce spesso opportuno, per la più facile intelligenza, di delineare in piano un'altra figura, la quale, senza essere ricavata dalla prima secondo una determinata legge geometrica, serva tuttavia ad *indicarne* approssimativamente la disposizione generale, riproducendone le più sostanziali relazioni di sito. Perchè la figura indicativa adempia a tale condizione, bisogna che tutte le grandezze, sì lineari che angolari, della figura data, vi si trovino sostituite da grandezze di eguale specie (rispettivamente); bisogna inoltre che le lunghezze di due linee corrispondenti, e i seni di due angoli corrispondenti abbiano sempre fra loro un rapporto finito, poco importando poi che tale rapporto varii arbitrariamente da una parte all'altra della figura, purchè non diventi mai nè nullo nè infinito. È ovvio del resto che, in tanta latitudine di scelta, conviene far sì che nella figura indicativa il rapporto anzidetto non presenti eccessive deviazioni da un certo valor medio. Ciò posto, se il triangolo geodetico testè immaginato ha tutti i suoi vertici a distanza finita, è chiaro che ogni triangolo piano può servire ad indicarlo. Questo triangolo piano potrebbe essere lo stesso triangolo rettilineo che ne forma la rappresentazione nel piano ausiliare, triangolo che sarebbe totalmente interno al cerchio limite. Si potrebbe ancora, secondo le circostanze, preferire un triangolo curvilineo, i cui angoli fossero p. es. eguali a quelli del triangolo geodetico. Ma se si suppone che i vertici del triangolo geodetico vadano allontanandosi indefinitamente e passino a distanza infinita, è chiaro che, mentre il triangolo stesso continua ad essere una figura esistente sulla superficie, con tutti i suoi punti, tranne i vertici, a distanza finita, la figura indicativa non potrebbe essere finita in ogni senso senza violare in qualche parte le condizioni che abbiamo formulato. Per es. il triangolo rettilineo rappresentante il triangolo geodetico sul piano ausiliare avrebbe i suoi angoli finiti, mentre quelli del triangolo geodetico sarebbero nulli. E un triangolo curvilineo coi lati tra loro tangenti nei vertici violerebbe del pari le condizioni anzidette in ciò che, prendendo due punti b, c sui lati che concorrono in un vertice a, si otter-

rebbero degli intervalli *a b*, *b c* il cui rapporto sarebbe finito nel triangolo indicativo, infinito nel geodetico (fig. 1ª). Per togliere questa discordanza bisognerebbe che tutti gli intervalli analoghi a *b c* fossero nulli nella figura indicativa, il chè non potrebbe





ottenersi altrimenti che dando ad essa la disposizione (fig. 2ª), dove il punto *o* concentra in sè stesso la rappresentanza di tutti i punti posti a distanza finita nel triangolo geodetico. Una tale figura potrebbe concepirsi come risultante dall'osservare il triangolo geodetico con una lente dotata della proprietà (fittizia) di produrre un impiccolimento infinito. Infatti, in tale ipotesi, tutti gli intervalli finiti apparirebbero come nulli e gli infiniti come finiti.

Ciò concorda sostanzialmente con quello che ha notato Gauss nella sua lettera del 12 luglio 1831 a Schumacher *) nella quale è pur detto che il semiperimetro del cerchio non-euclideo di raggio ρ ha per valore

$$\frac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}}\right)$$

dove k è una costante. Questa costante, che Gauss dice esserci offerta dall'esperienza come estremamente grande rapporto a tutto ciò che noi possiamo misurare, non è altro, secondo l'attual punto di vista ed in base alla formola (8), che il raggio di quella superficie pseudosferica che noi introduciamo inconsapevolmente nella planimetria al posto del piano euclideo, ogni volta che le nostre considerazioni si appoggiano a quelle sole premesse che sono vere tanto per il piano quanto per tutte le superficie della detta classe.

Volendo ora procedere a mostrare in modo più concreto l'accordo della geometria

---

*) Veggasi l'appendice alle *Études géométriques sur la théorie des parallèles* di Lobatschewsky (trad. Hoüel), Paris, 1866.

pseudosferica colla planimetria non-euclidea, si rende necessario di esaminare attentamente l'espressione analitica che abbiamo usata per rappresentare l'elemento lineare della superficie pseudosferica. E innanzi tutto si affaccia la seguente quistione: le due geodetiche che abbiamo chiamate fondamentali debbono essere scelte in qualche modo particolare perchè l'elemento abbia la forma anzidetta? Veramente sembrerebbe che esse potessero essere scelte ad arbitrio, poichè se ogni pezzo di superficie è sovrapponibile in modo qualunque alla superficie stessa, chiaro è che due qualisivogliano geodetiche ortogonali esistenti in quel pezzo si possono far coincidere con due altre qualisivogliano, purchè ortogonali del pari. Siccome però la quistione che abbiamo sollevata è essenziale per lo scopo nostro, così abbiamo creduto di dedicare ad essa la Nota II, nella quale, dimostrandosi direttamente che le geodetiche fondamentali sono arbitrarie, risulta al tempo stesso provato, senza bisogno di ammettere preliminari conoscenze in proposito, che ogni pezzo di superficie è applicabile in modo qualunque sulla superficie stessa.

In conseguenza di questo fatto e delle ragioni già esposte, i teoremi della planimetria non-euclidea relativi alle figure rettilinee piane diventano necessariamente validi per le analoghe figure geodetiche esistenti sulle superficie pseudosferiche. Tali sono per esempio quelli dei n[i] 3-10, 16-24, 29-30, ecc. delle *Études géométriques* ... di LOBATSCHEWSKY.

Prendiamo ora a considerare le due geodetiche spiccate da un punto dato, parallelamente ad una geodetica data. Sia δ la lunghezza della normale geodetica condotta dal punto a questa geodetica. Questa normale divide per metà l'angolo delle due parallele. Infatti staccando la striscia di superficie compresa fra la geodetica normale, una delle parallele e la corrispondente metà della geodetica data, invertendola, ed applicandola di nuovo sulla superficie, in modo che la normale coincida con sè stessa, mentre la metà della geodetica data si sovrapponga sull'altra metà, è chiaro che la parallela limitante la striscia si deve sovrapporre all'altra parallela, senza di che dal punto dato si potrebbero condurre più di due parallele alla geodetica data. Chiamiamo *angolo di parallelismo* l'angolo formato da ciascuna delle parallele colla normale e denotiamolo con Δ. Per calcolare questo angolo, facciamo uso della nostra solita analisi, ponendo l'origine ($u = v = 0$) nel punto dato e dirigendo la geodetica fondamentale $v = 0$ normalmente alla geodetica data; talchè quest'ultima risulta rappresentata dall'equazione

$$u = a \operatorname{tgh} \frac{\delta}{R},$$

come facilmente si rileva dalle formole (7').

A questa geodetica corrisponde nel piano ausiliare una corda perpendicolare all'asse delle x, bisecata da questo asse, uno dei cui termini ha per ordinata la quantità $\dfrac{a}{\cosh \dfrac{\delta}{R}}$.

Questo punto del cerchio limite determina il raggio d'equazione

$$y = \frac{x}{\operatorname{sen h} \frac{\delta}{R}},$$

al quale corrisponde sulla superficie una delle parallele considerate; e poichè gli angoli intorno all'origine sono eguali sulla superficie e sul piano ausiliare, si deve evidentemente avere

$$\operatorname{tg} \Delta . \operatorname{sen h} \frac{\delta}{R} = 1, \tag{9}$$

formola che contiene la relazione cercata fra la distanza normale δ e l'angolo di parallelismo Δ. Essa coincide con quella trovata dal sig. BATTAGLINI *). Per confrontarla con quella di LOBATSCHEWSKY basta scriverla sotto la forma

$$e^{-\frac{2\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}} \cot \Delta - 1 = 0,$$

e dedurne

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{-\cos \Delta \pm 1}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

Il segno inferiore è inammissibile perchè $\frac{\delta}{R}$ è quantità reale, quindi

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta = e^{-\frac{\delta}{R}},$$

la quale è appunto la formola di LOBATSCHEWSKY (l. c., n° 38), salva la differenza dei simboli e quella che proviene dalla scelta dell'unità.

Indicando, come fa LOBATSCHEWSKY (n° 16), con $\Pi(z)$ l'angolo di parallelismo relativo alla distanza normale z, si ha dalla (9)

$$\cos h \frac{z}{R} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(z)}, \quad \operatorname{sen h} \frac{z}{R} = \cot \Pi(z). \tag{10}$$

Ora, per una osservazione del sig. MINDING **), sviluppata dal sig. CODAZZI ***), è noto che le ordinarie formole relative ai triangoli sferici si convertono in quelle relative ai triangoli geodetici delle superficie di curvatura costante negativa, apponendo il

*) Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pag. 225.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XX (1840), pag. 323.

***) Annali di Scienze fisiche e matematiche (del TORTOLINI), t. VIII (1857), pag. 346.

fattore $\sqrt{-1}$ ai rapporti dei lati col raggio e lasciando inalterati gli angoli, ciò che equivale a mutare le funzioni circolari dei lati in funzioni iperboliche. Per es. la prima formola della trigonometria sferica

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos A$$

diventa

$$\cos h\frac{a}{R} = \cos h\frac{b}{R}\cos h\frac{c}{R} - \operatorname{sen} h\frac{b}{R}\operatorname{sen} h\frac{c}{R}\cos A.$$

Introducendo invece dei lati a, b, c i corrispondenti angoli di parallelismo mediante le formole (10), questa relazione si converte nella seguente:

$$\cos A . \cos \Pi(b) . \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen}\Pi(b).\operatorname{sen}\Pi(c)}{\operatorname{sen}\Pi(a)} = 1,$$

e questa è una delle equazioni fondamentali della planimetria non-euclidea *). Analogamente si possono ottenere le altre. (Il passaggio inverso da queste equazioni a quelle della trigonometria sferica è stato indicato da LOBATSCHEWSKY, alla pag. 34, ma come un semplice fatto analitico).

I risultati precedenti ci sembrano manifestare pienamente la corrispondenza vigente fra la planimetria non-euclidea e la geometria pseudosferica. Per verificare la stessa cosa da un altro punto di vista, vogliamo ancora stabilire direttamente, colla nostra analisi, il teorema relativo alla somma dei tre angoli di un triangolo.

Consideriamo il triangolo rettangolo formato dalla geodetica fondamentale $v = 0$, da una delle geodetiche perpendicolari $u =$ cost., e dalla geodetica uscente dall'origine sotto l'angolo μ, la cui equazione è

$$v = u \operatorname{tg} \mu .$$

Chiamiamo μ' il terzo angolo di questo triangolo. L'angolo corrispondente ad esso, nel piano ausiliare è $90^\circ - \mu$, epperò la relazione stabilita precedentemente fra gli angoli corrispondenti nella superficie e nel piano dà

$$\operatorname{tg}\mu' = \frac{w\cos\mu}{a\operatorname{sen}\mu},$$

donde si scorge che quando μ è un angolo acuto, lo è pure μ'. Essendo $v = u \operatorname{tg}\mu$, questa formola può scriversi, prendendo il radicale positivamente,

$$\operatorname{tg}\mu' = \frac{\sqrt{a^2\cos^2\mu - u^2}}{a\operatorname{sen}\mu},$$

*) LOBATSCHEWSKY, l. c., n° 37.

donde

$$d\mu' = -\frac{a \operatorname{sen} \mu . u\, d u}{(a^2 - u^2)\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}},$$

espressione dell'incremento che riceve μ' quando, rimanendo costante μ, si sposta il cateto opposto a quest'angolo. Ciò posto se dell'elemento superficiale

$$\sqrt{E G - F^2}.d u\, d v = R^2 a \frac{d u\, d v}{(a^2 - u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

si prende l'integrale rispetto a v, fra $v = 0$ e $v = u \operatorname{tg} \mu$, che si trova essere

$$\frac{R^2 a \operatorname{sen} \mu . u\, d u}{(a^2 - u^2)\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}},$$

ossia

$$- R^2 d\mu',$$

si ha l'incremento che riceve l'area del triangolo considerato, quando si sposta il cateto opposto all'angolo μ. Integrando di nuovo fra $\mu' = 90^\circ - \mu$ e $\mu' = \mu$ (dei quali valori il primo evidentemente corrisponde ad $u = 0$), si ottiene

$$R^2\left(\frac{\pi}{2} - \mu - \mu'\right),$$

espressione dell'area totale del triangolo rettangolo. Da questa si passa tosto a quella di un triangolo geodetico qualunque ABC, dividendolo in due triangoli rettangoli con una geodetica condotta da un vertice normalmente al lato opposto, e si trova

$$R^2(\pi - A - B - C).$$

Questa espressione, dovendo riuscire positiva, manifesta che la somma dei tre angoli di un triangolo geodetico qualunque non può mai eccedere 180°. Se essa fosse eguale a 180° in un solo triangolo, di dimensioni finite, bisognerebbe che fosse $R = \infty$, ed allora in ogni altro triangolo finito si avrebbe parimente $A + B + C = \pi$. Ma per $R = \infty$ la (9) dà $\Delta = \frac{\pi}{2}$, quindi l'angolo di parallelismo sarebbe necessariamente retto; e reciprocamente. Queste sono pure le conclusioni cui giunge la geometria non-euclidea.

Il triangolo formato da una geodetica e dalle due geodetiche ad essa parallele condotte per un punto esterno, ha due angoli nulli ed il terzo eguale a 2Δ; quindi la sua area è finita e data da

$$R^2(\pi - 2\Delta),$$

ossia, per la (9), da

$$2R^2 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen h} \frac{\delta}{R}\right),$$

dove δ è la distanza dal punto alla geodetica. Per R molto grande questa quantità è prossimamente eguale a $2\delta R$, ed è quindi infinita per il piano, come è noto, ma non lo è che in questo caso.

Un triangolo geodetico i cui vertici sono tutti all'infinito ha un'area finita e determinata, il cui valore πR^2 è indipendente dalla sua forma.

Un poligono geodetico di n lati, cogli angoli interni A, B, C, ... ha l'area

$$R^2[(n-2)\pi - A - B - C - \cdots].$$

Se il poligono ha tutti i vertici all'infinito, la sua area, che non cessa d'essere finita, si riduce a $(n-2)\pi R^2$ ed è quindi indipendente dalla sua forma.

Passiamo ora ad esaminare quelle curve che abbiamo chiamate, secondo un uso già adottato, circonferenze geodetiche.

Alla fine della Nota II abbiamo trovato che la circonferenza geodetica col centro nel punto qualunque (u_0, v_0) e col raggio geodetico ρ è rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cos \text{h} \frac{\rho}{R}. \tag{11}$$

Quest'equazione generale ci diventa utile in seguito, ma ora possiamo approfittare delle semplificazioni che risultano dal supporre collocata l'origine ($u = v = 0$) nel centro della circonferenza considerata. Dando all'espressione dell'elemento lineare (come nella Nota II) la forma

$$ds^2 = R^2 \frac{w^2(du^2 + dv^2) + (u\,du + v\,dv)^2}{w^4},$$

e ponendo

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r \operatorname{sen}\varphi,$$

se ne deduce tosto l'espressione equivalente

$$ds^2 = R^2\left[\left(\frac{a\,dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{r^2\,d\varphi^2}{a^2 - r^2}\right].$$

Ma chiamando ρ la distanza geodetica del punto (u, v) ossia (r, φ) dall'origine, si ha, come sappiamo,

$$\frac{a\,dr}{a^2 - r^2} = \frac{d\rho}{R}, \qquad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \operatorname{sen h}^2 \frac{\rho}{R},$$

dunque

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}\right)^2 d\varphi^2 , \tag{12}$$

espressione già conosciuta dell'elemento lineare della superficie pseudosferica.

Quest'espressione rientra nella forma canonica dell'elemento lineare di una superficie di rotazione. Ma bisogna osservare che nel caso attuale non si potrebbe applicare effettivamente sopra una superficie di rotazione la calotta pseudosferica circostante al punto ($u = v = 0$), senza alterarne la continuità per mezzo di un qualche taglio operato in essa partendo dal punto stesso. Infatti la supposta superficie di rotazione, se esistesse senza tale condizione, incontrerebbe il proprio asse nel centro comune ($\rho = 0$) di tutte le circonferenze geodetiche $\rho =$ cost. ed avrebbe quindi in questo punto le sue due curvature di egual senso, il che non può essere, perchè una superficie pseudosferica ha tutti i suoi punti *iperbolici*. La stessa impossibilità risulta dal considerare che, quando non si volesse eseguire il taglio anzidetto, la variabile φ rappresenterebbe la longitudine del meridiano variabile, epperò il raggio del parallelo corrispondente all'arco meridiano sarebbe $R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}$. La variazione di questo raggio sarebbe quindi uguale a $\cos h \frac{\rho}{R} . d\rho$, cioè maggiore di $d\rho$, il che è assurdo, poichè la variazione anzidetta eguaglia la projezione di $d\rho$ sul piano del parallelo.

L'espressione (12) dell'elemento lineare, benchè priva dei vantaggi inerenti all'uso delle nostre variabili u, v, può essere utile talvolta per la sua semplicità. Essa si presta p. es. alla determinazione della curvatura tangenziale delle circonferenze geodetiche, la quale, per la circonferenza di raggio ρ, ha il valore $\dfrac{1}{R \operatorname{tg h} \frac{\rho}{R}}$; questa curvatura è adunque costante lungo tutta la periferia del cerchio geodetico e non dipende che dal raggio. Questa proprietà riesce manifesta anche *a priori*, osservando che il pezzo di superficie terminato da un cerchio geodetico si può applicare in modo qualunque sulla superficie medesima, senza che il suo lembo cessi mai di essere un cerchio geodetico col centro nel punto su cui si applica il suo centro primitivo.

Il teorema che «le geodetiche erette normalmente nei punti medî delle corde di una circonferenza geodetica concorrono tutte nel suo centro» si dimostra come il corrispondente teorema della planimetria ordinaria, e se ne conclude che la costruzione del centro della circonferenza passante per tre punti non situati sopra una stessa geodetica è affatto analoga all'ordinaria, talchè tale circonferenza è sempre unica e determinata.

Ma qui sorge una difficoltà. Scelti ad arbitrio tre punti della superficie, può accadere che le geodetiche perpendicolari nei punti medii delle loro congiungenti non si

intersechino in alcun punto *reale* della superficie, e quindi, se si restringe la denominazione di circonferenze geodetiche alle curve descritte dall'estremità di un arco geodetico invariabile che gira intorno ad un punto *reale* della superficie, bisogna necessariamente ammettere che non sempre si può far passare una circonferenza geodetica per tre punti della superficie *scelti in modo qualunque*. Anche questo, *mutatis mutandis*, è d'accordo coi principii di LOBATSCHEWSKY (l. c., n° 29).

Nondimeno, poichè le geodetiche della superficie sono sempre rappresentate dalle corde del cerchio limite, se più corde sono tali che prolungate si incontrino in uno stesso punto esterno al cerchio, è lecito risguardare le geodetiche corrispondenti come aventi in comune un punto *ideale*, e le loro trajettorie ortogonali come alcunchè di analogo alle circonferenze geodetiche propriamente dette.

Cerchiamo direttamente l'equazione di queste trajettorie.

L'equazione

$$v - v_0 = k(u - u_0)$$

rappresenta il sistema delle geodetiche uscenti dal punto (u_0, v_0), reale od ideale secondo che $u_0^2 + v_0^2$ è minore o maggiore di a^2. L'equazione differenziale dello stesso sistema è

$$\frac{du}{u - u_0} = \frac{dv}{v - v_0},$$

epperò quella del sistema ortogonale è

$$[E(u - u_0) + F(v - v_0)]\,du + [F(u - u_0) + G(v - v_0)]\,dv = 0,$$

cioè, pei valori attuali di E, F, G,

$$d\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = 0.$$

Quindi

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C \tag{13}$$

è l'equazione finita delle circonferenze geodetiche concepite nel senso più generale, cioè qualunque ne sia il centro (u_0, v_0), reale od ideale.

Quando questo centro è reale, la sua distanza dalla curva è costante, in virtù di un teorema notissimo; ed infatti, denominando ρ questa distanza, si ha, dal confronto coll'equazione (11),

$$\cos h\frac{\rho}{R} = \frac{C}{\sqrt{a_0^2 - u_0^2 - v_0^2}}.$$

In questo caso è chiaro che fra i valori ammissibili per la costante C non è compreso

il valor *zero,* poichè il luogo corrispondente a questa ipotesi, essendo rappresentato nel piano ausiliare da una retta esterna al cerchio limite, cade tutto nelle regioni ideali della superficie.

Quando invece il centro è ideale, la nozione del raggio geodetico manca, ma la costante C può ricevere il valor *zero,* perchè l'equazione risultante

$$a^2 - u u_0 - v v_0 = 0$$

rappresenta, sul piano ausiliare, una corda del cerchio-limite e precisamente la polare del punto esterno (u_0, v_0). Quest'equazione definisce una geodetica reale della superficie: possiamo dunque concludere che fra le infinite circonferenze geodetiche aventi lo stesso centro ideale esiste sempre una (ed una sola) geodetica reale, talchè le circonferenze geodetiche a centro ideale si possono anche definire come curve parallele (geodeticamente) alle geodetiche reali. Quest'ultima proprietà venne notata già dal sig. BATTAGLINI, con diverso linguaggio *). Si vede dunque che mentre sulla superficie sferica i due concetti di « circonferenza geodetica » e di « curva parallela ad una linea geodetica » coincidono perfettamente fra loro, sulla superficie pseudosferica invece presentano una differenza, procedente dalla realità od idealità del centro.

Poichè ogni circonferenza geodetica a centro ideale è equidistante in tutti i suoi punti da una geodetica determinata, supponiamo che questa sia la stessa $v = 0$, ciò che è sempre lecito, e chiamiamo ξ la distanza geodetica del punto (u, v) da questa fondamentale. Questa distanza è misurata sopra una delle geodetiche del sistema $u = \text{cost.}$ ed è data dalla formola

$$\xi = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u^2} + v}{\sqrt{a^2 - u^2} - v} .$$

Supponendo ξ costante, si ha di qui l'equazione fra u e v di una qualunque delle circonferenze geodetiche che hanno il centro nel punto ideale di concorso di tutte le geodetiche normali alla $v = 0$.

Chiamiamo η l'arco della geodetica $v = 0$ compreso fra l'origine e la normale ξ: il suo valore è dato da

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a + u}{a - u} .$$

Dalle due equazioni qui scritte si trae

$$u = a \operatorname{tg\,h} \frac{\eta}{R} , \qquad v = \frac{a \operatorname{tg\,h} \frac{\xi}{R}}{\cos\text{h} \frac{\eta}{R}} ,$$

*) Giornale di Matematiche, vol. V (1867), pag. 228.

donde

$$w^2 = a^2 - u^2 - v^2 = \frac{a^2}{\cos h^2 \frac{\xi}{R} . \cos h^2 \frac{\eta}{R}} .$$

Trasformando dalle variabili u, v alle ξ, η l'espressione (1), si trova

$$ds^2 = d\xi^2 + \cos h^2 \frac{\xi}{R} . d\eta^2 , \tag{14}$$

espressione che conviene ad una superficie di rotazione.

Designando con r_0 il raggio del parallelo minimo di questa superficie, che corrisponde evidentemente a $\xi = 0$, con r quello del parallelo ξ, si ha

$$r = r_0 \cos h \frac{\xi}{R} ,$$

e quindi

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{r_0}{R} \operatorname{sen} h \frac{\xi}{R} .$$

Dunque la zona di superficie pseudosferica che può essere realmente conformata a superficie di rotazione è definita dalla condizione

$$\left(\frac{r_0}{R} \operatorname{sen} h \frac{\xi}{R} \right)^2 < 1 ,$$

ossia è racchiusa fra due circonferenze geodetiche equidistanti dalla geodetica $\xi = 0$, la quale si dispone secondo il parallelo minimo. La larghezza di questa zona dipende dal raggio che si vuole assegnare al parallelo minimo, ed è tanto maggiore quanto questo è minore. La lunghezza della zona stessa è indefinita, epperò essa si ravvolge infinite volte sulla superficie di rotazione, nel che è da osservare che i punti i quali si sovrappongono in tal modo l'uno all'altro devono sempre concepirsi come distinti, senza di che cesserebbe d'esser vero il teorema che per due punti della superficie passi una sola geodetica: in altre parole, si deve concepire la superficie di rotazione come il limite di un elicoide il cui passo converge verso zero. I due paralleli estremi hanno il raggio uguale a $\sqrt{R^2 + r_0^2}$, e i loro piani sono tangenti circolarmente alla superficie.

Fra le circonferenze geodetiche a centro reale e quelle a centro ideale si trovano, come ente intermedio, le circonferenze geodetiche che hanno il centro a distanza infinita, le quali meritano di essere considerate a cagione delle loro notabilissime proprietà.

L'equazione generale di queste circonferenze conserva la forma (13), poichè il processo che ci ha condotto a questa vale per ogni posizione del centro; ma se tale equazione si confronta colla (11), in cui la quantità $\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$, ossia w_0, converge

verso zero quando il centro passa all'infinito, mentre nella stessa ipotesi il secondo membro cresce indefinitamente, si vede che il prodotto $w_0 \cos h \frac{\rho}{R}$ converge verso un valore finito, al quale converge del pari, evidentemente, il prodotto $\frac{1}{2} w_0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Ora se in luogo di ρ si pone $\rho' - \rho$, la (11) può scriversi

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{w_0}{2} e^{\frac{\rho'}{R}} . e^{-\frac{\rho}{R}} + \frac{w_0}{2} e^{-\frac{\rho'}{R}} . e^{\frac{\rho}{R}},$$

quindi, mantenendo ρ finito e facendo crescere indefinitamente ρ', mentre w_0 converge verso zero, si ha, al limite,

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}},$$

dove k è una costante. Rappresentando in questo modo il sistema delle circonferenze geodetiche col centro all'infinito nel punto (u_0, v_0), il parametro ρ esprime l'intervallo costante fra una qualunque di queste circonferenze ed una determinata fra esse, e cresce positivamente da questa verso il centro all'infinito. Ponendo $k = a$, la circonferenza $\rho = 0$ diventa quella che passa per il punto $(u = v = 0)$.

Se coll'equazione così ottenuta

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = a e^{-\frac{\rho}{R}}, \tag{15}$$

si combina quest'altra

$$\frac{u_0 v - u v_0}{a^2 - u u_0 - v v_0} = \frac{\sigma}{R}, \tag{16}$$

e si tien conto della relazione $u_0^2 + v_0^2 = a^2$, si trova che l'elemento lineare (1) assume la forma

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{-\frac{2\rho}{R}} d\sigma^2, \tag{17}$$

la quale conviene di nuovo ad una superficie di rotazione.

Indicando con r_0 il raggio del parallelo $\rho = 0$, di cui σ è l'arco, con r quello del parallelo ρ, si ha

$$r = r_0 e^{-\frac{\rho}{R}},$$

e quindi la superficie di rotazione non è reale che dentro i limiti determinati dalla relazione $\rho > R \log \frac{r_0}{R}$, talchè la circonferenza $\rho = 0$ non può diventare realmente un parallelo se non si prende $r_0 \overline{<} R$. Il parallelo massimo ha il raggio R e corrisponde

al valore $\rho = R \log \frac{r_0}{R}$; quindi con una opportuna determinazione di r_0 esso può essere occupato da una qualunque delle circonferenze considerate; p. es. facendo $r_0 = R$ si ha la stessa circonferenza iniziale $\rho = 0$. Il parallelo minimo corrisponde a $\rho = \infty$ ed ha il raggio nullo, cosicchè la superficie di rotazione si avvicina asintoticamente al suo asse da una sola parte, mentre dall'altra è limitata dal piano del parallelo massimo col quale si accorda tangenzialmente. Su questa superficie si ravvolge infinite volte la superficie pseudosferica, terminata alla linea $\rho = 0$, se $r_0 = R$.

La curvatura tangenziale di un parallelo qualunque si trova essere $\frac{1}{R}$, cioè eguale per tutti. Ora il raggio della curvatura tangenziale di un parallelo non è altro che la porzione di tangente al meridiano compresa fra il punto di contatto (sul parallelo considerato) e l'asse. Dunque per l'attuale superficie di rotazione questa porzione di tangente è costante, la curva meridiana è la nota *linea dalle tangenti costanti*, e la superficie generata è quella che si suole riguardare come tipo delle superficie di curvatura costante negativa *).

D'altra parte le circonferenze geodetiche col centro all'infinito corrispondono manifestamente agli *oricicli* della geometria di Lobatschewsky (l. c. n[i] 31 e 32). Conservando questa denominazione noi possiamo dunque dire che un sistema di oricicli concentrici si trasforma, mediante una flessione opportuna della superficie, nel sistema dei paralleli della superficie di rotazione generata dalla linea delle tangenti costanti.

Per avere una riprova della corrispondenza dei nostri oricicli con quelli di Lobatschewsky, osserviamo che all'angolo diedro $\frac{\sigma}{R}$ di due piani meridiani corrispondono sui paralleli ρ_1 e ρ_2 i due archi s_1, s_2 dati da

$$s_1 = \sigma e^{-\frac{\rho_1}{R}}, \qquad s_2 = \sigma e^{-\frac{\rho_2}{R}},$$

donde, chiamando τ la distanza $\rho_2 - \rho_1$, si trae

$$s_2 = s_1 e^{-\frac{\tau}{R}},$$

formola che coincide con quella di Lobatschewsky (n° 33), salva la solita differenza nella scelta dell'unità.

L'espressione (17) dell'elemento lineare è indipendente dalle coordinate (u_0, v_0) del centro degli oricicli considerati; inoltre abbiamo veduto che ciascuno degli oricicli di un dato sistema può prendere il posto del parallelo massimo. Possiamo dunque con-

*) Liouville nella nota IV alla *Application de l'Analyse à la Géométrie* di Monge, Paris, 1850.

cludere che due oricicli qualisivogliano della superficie possono sempre essere sovrapposti l'uno sull'altro.

Per due punti della superficie pseudosferica passano sempre due oricicli, che sono determinati conducendo pel punto medio della loro congiungente geodetica una geodetica perpendicolare, i cui due punti all'infinito sono i centri degli oricicli cercati. Gli archi di questi oricicli, compresi fra i punti dati, hanno una stessa grandezza, che dipende unicamente dalla distanza geodetica dei due punti. Chiamando ρ questa distanza e σ la lunghezza di quegli archi, si trova agevolmente col mezzo delle equazioni (15), (16) (dove ρ ha però un significato diverso)

$$\sigma = 2R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{2R},$$

formola che presenta una singolare analogìa con quella notissima che dà la corda in funzione dell'arco sotteso nel cerchio di raggio R *).

Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpetrazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.

La natura stessa di questa interpetrazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea. Infatti per conseguire l'interpetrazione testè esposta si è dovuto sostituire al piano una superficie che è con esso irriducibile, cioè il cui elemento lineare non può in alcun modo essere ridotto alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

che caratterizza essenzialmente il piano stesso. Se quindi ci mancasse la nozione delle superficie non applicabili sul piano, ci sarebbe impossibile attribuire un vero significato geometrico alla costruzione fin quì svolta. Ora l'analogìa porta naturalmente a credere che, se può esistere una costruzione consimile per la stereometria non-euclidea, essa deve attingersi dalla considerazione di uno spazio il cui elemento lineare *non* sia riducibile alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

che caratterizza essenzialmente lo spazio euclideo. E poichè finora la nozione di uno spazio diverso da questo sembra mancarci, od almeno sembra trascendere il dominio

---

*) Veggasi BATTAGLINI, l. c. pag. 229, ed anche la nostra Nota *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione*, Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI (1864), pag. 271, oppure queste OPERE, vol. I, pag. 199.

dell'ordinaria geometria, è ragionevole supporre che quand'anche le considerazioni analitiche alle quali si appoggiano le precedenti costruzioni sieno suscettive d'essere estese dal campo di due variabili a quello di tre, i risultati ottenuti in quest'ultimo caso non possano tuttavia essere costruiti coll'ordinaria geometria.

Questa congettura acquista un grado di probabilità molto vicino alla certezza quando s'imprende effettivamente ad estendere l'analisi precedente al caso di tre vabiabili. Infatti ponendo

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{R^2}{(a^2-t^2-u^2-v^2)^2}[(a^2-u^2-v^2)dt^2+(a^2-v^2-t^2)du^2+(a^2-t^2-u^2)dv^2 \\ +2uv\,du\,dv+2vt\,dv\,dt+2tu\,dt\,du], \end{aligned} \right.$$

formola la cui composizione *a priori* con tre variabili t, u, v è suggerita dall'ispezione di quella della (1) colle due variabili u, v, si verifica agevolmente che le deduzioni analitiche cui dava luogo l'espressione (1) sussistono integralmente per la nuova, e che il valore di ds dato da essa è effettivamente quello dell'elemento lineare di uno spazio in cui la stereometria non-euclidea trova un'interpetrazione altrettanto completa, *analiticamente* parlando, quanto quella data per la planimetria.

Ma se alle variabili t, u, v se ne sostituiscono tre nuove ρ, ρ_1, ρ_2 ponendo

$$t = r\cos\rho_1, \qquad u = r\,\mathrm{sen}\,\rho_1\cos\rho_2, \qquad u = r\,\mathrm{sen}\,\rho_1\,\mathrm{sen}\,\rho_2,$$

$$\frac{R\,a\,dr}{a^2-r^2} = d\rho,$$

si trova

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R\,\mathrm{senh}\frac{\rho}{R}\right)^2(d\rho_1^2+\mathrm{sen}^2\rho_1 . d\rho_2^2),$$

formola la quale mostra essere ρ, ρ_1, ρ_2 coordinate curvilinee ortogonali dello spazio considerato. Ora il sig. LAMÉ ha dimostrato *) che assumendo come coordinate curvilinee dei punti dello spazio i parametri ρ, ρ_1, ρ_2 di tre famiglie di superficie ortogonali, nel qual caso il quadrato della distanza di due punti infinitamente vicini è rappresentato da un'espressione della forma

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

le tre funzioni di H, H_1, H_2 di ρ, ρ_1, ρ_2 che figurano in quest'espressione sono necessariamente soggette a soddisfare due distinte terne di equazioni a derivate parziali, che

---

*) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, pag. 76, 78 (Paris, 1859).

hanno a tipo le due seguenti:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} = 0 .$$

Nel nostro caso $H = 1$, $H_1 = R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}$, $H_2 = R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R} \operatorname{sen} \rho_1$, e per questi valori le prime tre equazioni riescono identicamente soddisfatte, ma le seconde lo sono solamente nel caso di $R = \infty$. Dunque l'espressione (18) non può appartenere all'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo e le formole appoggiate ad essa non possono essere costruite cogli enti forniti dall'ordinaria geometria.

Per completare la dimostrazione dell'impossibilità di conseguire una costruzione della stereometria non euclidea, senza uscire dal campo della geometria ordinaria, bisognerebbe poter escludere la possibilità di attingerla altrove che in una estensione del metodo seguito per la planimetria. Noi non pretendiamo di provare che ciò non si possa assolutamente fare: diciamo solo che la cosa ci sembra molto improbabile.

Abbiamo detto di passaggio che l'espressione (18) serve di base ad una completa interpetrazione analitica della stereometria non-euclidea. Questa interpetrazione viene da noi indicata altrove *). Qui facciamo solamente osservare che ponendo nella (18) $t =$ cost. si ottiene l'espressione dell'elemento lineare di una superficie reale di curvatura costante negativa; talchè quella superficie sulla quale abbiamo veduto verificarsi i teoremi della planimetria non-euclidea, può considerarsi come esistente tanto nello spazio ordinario, quanto nello spazio non-euclideo.

NOTA I.

La riduzione dell'elemento lineare di una superficie di curvatura costante negativa alla forma sotto la quale esso viene usato nelle presenti ricerche, si fonda sopra i ri-

---

*) In uno scritto che deve comparire sugli Annali di Matematica pura ed applicata [serie 2ª, t. II (1868-69), pag. 232; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 406], dove i principii più generali della geometria non-euclidea sono considerati indipendentemente dalle loro possibili relazioni cogli ordinarii enti geometrici.

Col presente lavoro abbiamo avuto principalmente in animo di attirare qualche interesse sopra tali ricerche, offrendo lo sviluppo di un caso nel quale la geometria astratta trova riscontro nella concreta; ma non vogliamo omettere di dichiarare che la validità del nuovo ordine di concetti non è punto subordinata alla possibilità o meno di un cosiffatto riscontro.

sultati di una nostra Memoria col titolo di: *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette* *).

Il principio che ha servito a risolvere questo problema è il seguente. Quando i punti di una superficie si fanno corrispondere, secondo una legge qualunque, con quelli di un piano, si possono sempre prendere per le due variabili indipendenti u, v che devono individuare i punti della superficie le stesse coordinate rettangolari x, y dei punti corrispondenti del piano. Ciò ammesso, se la rappresentazione dev'essere tale che alle geodetiche della superficie corrispondano le rette del piano, bisogna che l'equazione differenziale di 2° ordine delle linee geodetiche abbia per suo integrale completo un'equazione lineare fra u e v, e quindi bisogna che la detta equazione differenziale si riduca semplicemente a questa

$$du . d^2 v - dv . d^2 u = 0 .$$

Ora dalla forma generale dell'anzidetta equazione differenziale si ricava che ciò succede solamente quando le funzioni E, F, G componenti l'elemento lineare

$$ds = \sqrt{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}$$

soddisfanno a quattro relazioni, le quali insegnano che all'elemento stesso si può sempre dare la forma

$$ds = R \frac{\sqrt{(a^2 + v^2) du^2 - 2 u v du dv + (a^2 + u^2) dv^2}}{a^2 + u^2 + v^2} ,$$

dove R ed a sono costanti arbitrarie. Per riconoscere la natura delle superficie contenute in questa forma si è calcolata l'espressione della curvatura sferica (prodotto inverso dei due raggi di curvatura principale) e si è trovato per essa il valore $\frac{1}{R^2}$, donde si è concluso che le superficie in discorso hanno la loro curvatura sferica costante, epperò che queste sole superficie ammettono la rappresentazione piana colla condizione prescritta.

Nella citata Memoria si sono supposte reali le costanti R ed a, perchè lo scopo in vista del quale quelle ricerche erano state instituite dava speciale rilievo a questa ipotesi. Ed appunto per ciò si è osservato che quell'elemento conviene in particolare ad una superficie sferica di raggio R, tangente al piano figurativo nell'origine delle coordinate e rappresentata sul piano stesso per mezzo della projezione centrale; nel qual caso le variabili u, v sono precisamente le coordinate rettangolari della projezione del punto a cui quelle variabili si riferiscono.

---

*) Annali di Matematica pura ed applicata, t. VII (1865), pag. 185; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 262.

Ma siccome i valori delle costanti R ed a sono realmente arbitrarî, così è lecito supporli anche imaginarî, se conviene. Ed infatti cambiando quelle costanti in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'elemento lineare risultante corrisponde ad una superficie di curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$, le cui linee geodetiche non cessano di essere, come nel caso precedente, rappresentate nel piano da linee rette, e quindi date da equazioni lineari rispetto ad u, v. Questo è il modo in cui si passa dalle formole della Memoria citata a quelle del presente scritto. La sola differenza essenziale fra i due casi è che in quelle le variabili u, v possono ricevere tutti i valori reali, mentre in queste esse sono contenute entro certi limiti, che vengono facilmente assegnati.

NOTA II.

Scrivendo l'espressione dell'elemento lineare sotto la forma

$$ds^2 = R^2 \frac{w^2(du^2 + dv^2) + (u\,du + v\,dv)^2}{w^4}, \tag{1}$$

si vede subito che per passare dalle primitive geodetiche fondamentali a due altre passanti per la medesima origine ed ortogonali fra loro, servono le solite formole della trasformazione delle coordinate rettangole in un piano, quando l'origine è comune, cioè

$$u = u' \cos\mu - v' \operatorname{sen}\mu,$$

$$v = u' \operatorname{sen}\mu + v' \cos\mu,$$

u', v' essendo le nuove coordinate e μ l'angolo che la nuova fondamentale $v' = 0$ fa colla primitiva $v = 0$. Infatti da queste formole si trae

$$u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2, \qquad du^2 + dv^2 = du'^2 + dv'^2,$$

e quindi la (1) diventa

$$ds^2 = R^2 \frac{w'^2(du'^2 + dv'^2) + (u'\,du' + v'\,dv')^2}{w'^4}, \tag{1'}$$

conservando la primitiva sua forma. [Di quì si vede che le geodetiche ortogonali a quelle che divergono dall'origine sono rappresentate dalle corde del cerchio limite perpendicolari ai diametri che rappresentano queste ultime. Reciprocamente, affinchè due geodetiche intersecantisi ortogonalmente nel punto (u, v) siano rappresentate nel piano ausiliare da due rette ortogonali, bisogna che l'una o l'altra di quelle geodetiche pàssi per l'origine $(u = v = 0)$, come facilmente si rileva dalla formola data nel testo per

la trasformazione degli angoli. Questa proprietà diventa evidente nella projezione centrale della sfera]. Anche la lunghezza di un arco geodetico uscente dall'origine conserva nel *secondo* sistema la forma che aveva nel *primo*, essendo data da

$$\rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u'^2 + v'^2}}{a - \sqrt{u'^2 + v'^2}} . \tag{2}$$

Vediamo ora l'effetto di un cambiamento d'origine.

Per tal uopo prendiamo un punto qualunque (u_0, v_0) e supponiamo che la fondamentale $v' = 0$ del secondo sistema passi per esso, cioè supponiamo $\cos \mu = \frac{u_0}{r_0}$, $\operatorname{sen} \mu = \frac{v_0}{r_0}$ e quindi

$$u = \frac{u_0 u' - v_0 v'}{r_0}, \qquad v = \frac{v_0 u' + u_0 v'}{r_0}, \tag{3}$$

dove $r_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. Indi formiamo un *terzo* sistema, colle coordinate u'', v'', avente per fondamentali la geodetica $v' = 0$ e l'altra geodetica condotta normalmente a questa per il punto (u_0, v_0).

Conduciamo dal punto (u', v') qualunque una geodetica perpendicolare alla $v' = 0$ e chiamiamone q la lunghezza, p la distanza dalla primitiva origine (misurata sulla $v' = 0$). La (2) dà tosto

$$p = \frac{R}{2} \log \frac{a + u'}{a - u'}, \tag{4}$$

mentre dalla (1') si deduce agevolmente, ponendo $du' = 0$,

$$q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u'^2} + v'}{\sqrt{a^2 - u'^2} - v'} . \tag{5}$$

La distanza geodetica p_0 delle due origini $(u = v = 0)$, (u_0, v_0) ha per valore

$$p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + r_0}{a - r_0},$$

talchè l'arco geodetico compreso sulla geodetica fondamentale $v'' = 0$ del terzo sistema (che è la stessa cosa della $v' = 0$), fra il punto (u_0, v_0) e la normale q, è data da

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{(a + u')(a - r_0)}{(a - u')(a + r_0)} . \tag{6}$$

Ma chiamando a_0 la costante analoga ad a nel terzo sistema, ed osservando che in que-

sto sistema le quantità analoghe alle p, q del secondo sono $p - p_0$ e q, è chiaro che in analogia colle (4), (5) si deve avere

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a_0 + u''}{a_0 - u''}, \qquad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a_0^2 - u''^2} + v''}{\sqrt{a_0^2 - u''^2} - v''}.$$

Eguagliando queste espressioni con quelle date dalle (6), (5) si ottengono due relazioni, le quali forniscono

$$(7) \qquad u'' = \frac{a a_0 (u' - r_0)}{a^2 - r_0 u'}, \qquad v'' = \frac{a_0 w_0 v'}{a^2 - r_0 u'}, \qquad \left(w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}\right).$$

La costante a_0 rimane propriamente indeterminata, perchè non si possono avere che equazioni fra i rapporti $\frac{u'}{a}$, $\frac{v'}{a}$ ed i rapporti $\frac{u''}{a_0}$, $\frac{v''}{a_0}$. Sembra però conveniente determinare a_0 colla condizione che per $u'' = 0$, cioè $u' = r_0$, si abbia $v' = v''$, ed allora si trova $a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$. Ritenuto questo valore le formole precedenti dànno

$$u' = \frac{a(a_0 r_0 + a u'')}{a a_0 + r_0 u''}, \qquad v' = \frac{a a_0 v''}{a a_0 + r_0 u''},$$

e questi valori, sostituiti nella (1'), dànno

$$d s^2 = R^2 \frac{(a_0^2 - v''^2) d u''^2 + 2 u'' v'' d u'' d v'' + (a_0^2 - u''^2) d v''^2}{(a_0^2 - u''^2 - v''^2)^2}.$$

Dunque anche il trasporto dell'origine non altera la forma dell'elemento lineare, il quale non differisce dal primitivo che per la sostituzione della a_0 alla a, cambiamento che non è punto essenziale.

Per ottenere finalmente un *quarto* sistema affatto scevro da legami col primo, surroghiamo le due fondamentali $u'' = 0$, $v'' = 0$ con due nuove geodetiche ortogonali aventi la stessa origine (u_0, v_0), il che sappiamo farsi ponendo

$$u'' = u''' \cos \nu - v''' \operatorname{sen} \nu, \qquad v'' = u''' \operatorname{sen} \nu + v''' \cos \nu,$$

e sappiamo pure che tale sostituzione non cambia punto la forma dell'elemento. Vediamo così che la forma ammessa primitivamente per l'elemento lineare non è punto peculiare ad una determinata coppia di geodetiche fondamentali: il punto $(u = v = 0)$ può all'incontro essere uno qualunque della superficie, e la geodetica fondamentale $v = 0$ può essere una qualunque tra quelle uscenti da questo punto.

Tenendo conto delle relazioni trovate fra le coordinate dei successivi sistemi, e

ponendo per brevità

$$p = \frac{a u_0}{a_0 r_0} \cos \nu - \frac{v_0}{r_0} \operatorname{sen} \nu, \qquad p_1 = \frac{a u_0}{a_0 r_0} \operatorname{sen} \nu + \frac{v_0}{r_0} \cos \nu,$$

$$q = \frac{a v_0}{a_0 r_0} \cos \nu + \frac{u_0}{r_0} \operatorname{sen} \nu, \qquad q_1 = \frac{a v_0}{a_0 r_0} \operatorname{sen} \nu - \frac{u_0}{r_0} \cos \nu,$$

$$r = \frac{r_0 \cos \nu}{a a_0}, \qquad r_1 = \frac{r_0 \operatorname{sen} \nu}{a a_0},$$

si trovano le seguenti relazioni finali fra le u, v e le u''', v'''

$$u = \frac{u_0 + p u''' - p_1 v'''}{1 + r u''' - r_1 v'''}, \qquad v = \frac{v_0 + q u''' - q_1 v'''}{1 + r u''' - r_1 v'''}.$$

Considerando tanto le u, v quanto le u''', v''' come coordinate rettangole dei punti corrispondenti di due piani, queste formole esprimono una dipendenza omografica fra i piani stessi, circostanza di cui si è parlato nella Memoria citata nella Nota I.

Se si confronta la primitiva espressione dell'elemento lineare in funzione delle u, v, con quella finale in funzione delle u''', v''', si trova che esse si possono far coincidere ponendo

$$\frac{u}{a} = \pm \frac{u'''}{a_0}, \qquad \frac{v}{a} = \pm \frac{v'''}{a_0},$$

od anche

$$\frac{u}{a} = \pm \frac{v'''}{a_0}, \qquad \frac{v}{a} = \pm \frac{u'''}{a_0},$$

la scelta del segno essendo arbitraria in ciascuna formola. Ciò dimostra che la superficie pseudosferica, considerata come flessibile ed inestendibile, si può sovrapporre a sè medesima in modo che uno qualunque dei suoi punti (u_0, v_0) passi ad occupare la posizione di un qualunque altro punto ($u = v = 0$), e che una qualunque delle geodetiche uscenti dal primo punto (p. es. la $v''' = 0$) coincida in tutta la sua estensione con una qualunque di quelle uscenti dal secondo (p. es. colla $v = 0$). Anzi la duplicità dei segni fa vedere che la sovrapposizione di due angoli geodetici di egual grandezza formati intorno a quei due punti si può operare tanto direttamente quanto inversamente. Per es. l'angolo retto delle geodetiche $u''' = 0$, $v''' = 0$ può essere applicato su quello delle $u = 0$, $v = 0$, tanto facendo coincidere $u''' = 0$ con $u = 0$ e $v''' = 0$ con $v = 0$, quanto facendo coincidere $u''' = 0$ con $v = 0$ e $v''' = 0$ con $u = 0$. Dunque ogni pezzo di superficie può essere sovrapposto, tanto direttamente quanto inversamente, su qualunque parte della superficie stessa; epperò se in quel pezzo esi-

stesse una figura (p. es. un triangolo geodetico) essa potrebbe ricevere sulla superficie tutti quegli spostamenti che una figura piana può ricevere nel suo piano, senza mai cessare d'essere eguale a sè stessa. Naturalmente quest'eguaglianza non si deve riferire che alle lunghezze delle linee ed all'ampiezza degli angoli, giacchè la curvatura *assoluta* delle linee non entra quì in considerazione *).

La proprietà ora dimostrata era già nota, ma la dimostrazione precedente ci sembra possedere quel rigore che la natura del nostro soggetto richiede. Del resto il teorema di GAUSS stabilisce che se la proprietà in discorso può competere a qualche superficie, questa superficie è necessariamente fra quelle la cui curvatura sferica è costante.

Non tralasciamo di notare un risultato utile che si deduce facilmente da alcune delle formole precedenti. Il cerchio geodetico col centro nel punto (u_0, v_0) e col raggio ρ è rappresentato, nel terzo sistema, dall'equazione

$$u''^2 + v''^2 = a_0^2 \operatorname{tg h}^2 \frac{\rho}{R},$$

come risulta dalla formola (6) del testo. Ma dalle (7) di questa Nota, per essere $a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}$, si trae

$$u''^2 + v''^2 = \left(\frac{a_0}{a^2 - r_0 u'}\right)^2 \{a^2[(u' - r_0)^2 + v'^2] - (r_0 v')^2\},$$

e dalle (3) si ha pure

$$u' = \frac{u u_0 + v v_0}{r_0}, \qquad v' = \frac{u_0 v - u v_0}{r_0},$$

donde

$$u' - r_0 = \frac{u_0(u - u_0) + v_0(v - v_0)}{r_0}, \qquad v' = \frac{u_0(v - v_0) - v_0(u - u_0)}{r_0},$$

dunque finalmente

$$\frac{a^2[(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] - (u_0 v - u v_0)^2}{(a^2 - u u_0 - v v_0)^2} = \operatorname{tg h}^2 \frac{\rho}{R}.$$

Quest'equazione fornisce la distanza geodetica ρ di due punti qualunque (u, v),

---

*) L'eguaglianza *relativa* di cui si parla sarebbe eguaglianza *assoluta* per un essere i cui concetti geometrici non eccedessero il campo a due dimensioni della superficie considerata, come i nostri non eccedono quello a tre dimensioni dell'ordinario spazio.

(u_0, v_0). Quando questi punti sono infinitamente vicini essa riconduce immediatamente all'espressione dell'elemento lineare da cui siamo partiti.

Sostituendo il cos h alla tg h la precedente equazione assume la forma più elegante

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cos\text{h}\,\frac{\rho}{R}\,.$$

XXV.

TEORIA FONDAMENTALE DEGLI SPAZII DI CURVATURA COSTANTE *).

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo II (1868-69), pp. 232-255.

In una Memoria inserita negli Annali di Matematica pura ed applicata **) ho cercato le superficie dotate della proprietà di avere le loro linee geodetiche rappresentate da equazioni lineari, ed ho trovato che questa proprietà si verifica per le sole superficie di curvatura costante e per certe variabili speciali che l'analisi del problema ha spontaneamente introdotte.

Nel presente scritto espongo i risultati molto più generali a cui mi ha condotto l'ulteriore evoluzione di quel concetto, coordinato ad alcuni principî tracciati da RIEMANN nell'insigne suo lavoro postumo: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen,* non ha guari pubblicato dal sig. DEDEKIND nel XIII volume delle Memorie di Gottinga. Spero che le mie ricerche possano ajutare l'intelligenza di alcune parti di questo profondo lavoro.

Certe locuzioni di cui, per amor di brevità, faccio uso frequente non parranno, io credo, nè stentate nè oscure a chi guardi più alla sostanza che alla forma. L'attento lettore non avrà da fare alcuno sforzo per intenderle senz'altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuir loro che un significato meramente analitico.

*) Una traduzione francese (dovuta ad HOÜEL) di questa memoria si trova inserita nel periodico « Annales scientifiques de l'École normale supérieure », t. VI (1869), pp. 345-375. [N. d. R.].

**) *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette,* t. VII (1865), pag. 185; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 262.

L'espressione differenziale

$$(1) \qquad ds = R\frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}}{x},$$

dove $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ sono $n + 1$ variabili legate dall'equazione

$$(2) \qquad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2,$$

mentre R ed a sono due costanti, può risguardarsi come rappresentante l'*elemento lineare*, ossia la distanza di due punti infinitamente vicini, in uno *spazio* di *n dimensioni*, ciascun *punto* del quale è definito da un sistema di valori delle n *coordinate* $x_1, x_2, \ldots x_n$. La forma di quell'espressione determina la *natura* di questo spazio.

Ponendo per brevità

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2},$$

le *linee geodetiche* dello spazio in quistione sono quelle che sodisfanno all'equazione

$$\delta \int \frac{\Omega}{x} = 0,$$

colla condizione $x\delta x + x_1 \delta x_1 + \cdots + x_n \delta x_n = 0$. Mercè le solite trasformazioni della variazione dell'integrale, la prima equazione può svilupparsi così:

$$\int \left\{ \delta x \left[\frac{\Omega}{x^2} + d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)\right] + \delta x_1 . d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right) + \cdots + \delta x_n . d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right)\right\} = 0,$$

e, stante la relazione che vincola le variazioni $\delta x, \delta x_1, \ldots \delta x_n$, dà luogo alle equazioni seguenti:

$$\frac{\Omega}{x^2} + d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right) = kx, \qquad d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right) = kx_1, \ \ldots \ d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right) = kx_n,$$

dove k è un fattore da determinare. Ora, moltiplicando queste equazioni ordinatamente per $x, x_1, \ldots x_n$ e sommando, si ha

$$d\left(\frac{x\,dx + x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n}{x\Omega}\right) = k(x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

quindi, con riguardo alla (2), $k = 0$; epperò

$$(3) \qquad d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right) + \frac{\Omega}{x^2} = 0,$$

$$(4) \qquad dx_1 = c_1 x\Omega, \qquad dx_2 = c_2 x\Omega, \qquad \ldots \qquad dx_n = c_n x\Omega,$$

dove $c_1, c_2, \dots c_n$ sono costanti. Queste ultime n equazioni, quadrate e sommate, dànno

$$(5) \qquad \Omega = -\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

dove

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2}.$$

Questo valore di Ω rende identica la (3), della quale è perciò inutile tener conto; mentre le (4), colla eliminazione di $x\Omega$ e susseguente integrazione, dànno

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \qquad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \qquad \dots \qquad x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}.$$

Dunque le linee geodetiche dello spazio considerato sono rappresentate da $n - 1$ equazioni lineari fra le n coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$, a simiglianza di ciò cha ha luogo nel piano e nello spazio ordinario, quando si fa uso di coordinate cartesiane, e nelle superficie di curvatura costante, quando si fa uso delle variabili u, v della citata Memoria. Fra i sistemi di linee geodetiche sono da notarsi specialmente quelli che si ottengono eguagliando tutte le coordinate, tranne una, ad altrettante costanti. Per ogni punto dello spazio passa una geodetica di ciascuno di questi sistemi, cui appartengono gli stessi *assi* coordinati delle x_1, delle x_2, ... delle x_n, per ciascuno dei quali le restanti coordinate sono tutte nulle: conviene chiamarli *sistemi delle* x_1, *delle* x_2, ... *delle* x_n.

Per ottenere la lunghezza dell'arco geodetico ρ compreso fra due punti dati, si osservi che per la (5) si ha

$$d\rho = R\frac{\Omega}{x} = -\frac{R\,dx}{x\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

donde

$$cx = \frac{1}{\cosh\frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

ρ_0 essendo una costante arbitraria ed x la funzione $\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$. Indicando con $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ i valori delle coordinate al punto $\rho = 0$, cioè all'origine dell'arco, e con x^0 il corrispondente valore della funzione x, si ha

$$(6) \qquad cx^0 = \frac{1}{\cosh\frac{\rho_0}{R}},$$

e quindi, eliminando c,

$$x = \frac{x^0 \cosh\frac{\rho_0}{R}}{\cosh\frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

equazione cui si può dare la forma

$$(7)\qquad \frac{x^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{\rho}{R}}{\cos h^2 \frac{\rho_0}{R}} = 2 x x^0 \cos h \frac{\rho}{R} - x^2 - x^{0^2}.$$

D'altra parte, avendosi dalle equazioni precedenti

$$x \Omega = \frac{x^2 d\rho}{R} = \frac{1}{c^2} d \operatorname{tg} h \frac{\rho - \rho_0}{R},$$

le (4) dànno

$$x_1 = a_1 + \frac{c_1}{c^2} \operatorname{tg} h \frac{\rho - \rho_0}{R}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{c_2}{c^2} \operatorname{tg} h \frac{\rho - \rho_0}{R}, \qquad \ldots,$$

ovvero, sostituendo alle costanti $a_1, a_2, \ldots$ le $x_1^0, x_2^0, \ldots$,

$$x_1 - x_1^0 = c_1 x x^0 \operatorname{sen} h \frac{\rho}{R}, \qquad x_2 - x_2^0 = c_2 x x^0 \operatorname{sen} h \frac{\rho}{R}, \qquad \ldots;$$

donde, quadrando e sommando,

$$2(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x_n^0) - x^2 - x^{0^2} = c^2 x^2 x^{0^2} \operatorname{sen} h^2 \frac{\rho}{R}.$$

Quest'equazione, in virtù delle (6), (7), dà finalmente

$$(8)\qquad \cos h \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \cdots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)(a^2 - x_1^{0^2} - x_2^{0^2} - \cdots - x_n^{0^2})}},$$

e questa è la formola generale che porge la lunghezza di un arco geodetico in funzione delle coordinate dei suoi termini.

Supposte reali le variabili $x, x_1, \ldots x_n$ e le costanti R, a, il *limite* dello spazio di n dimensioni quì considerato è lo *spazio* di $n - 1$ *dimensioni* dato dall'equazione

$$(9)\qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2.$$

Dentro questo limite, cioè per

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < a^2,$$

il primo spazio è *continuo* e *semplicemente connesso*. Dalla (8) risulta poi che i punti appartenenti allo spazio limite sono tutti a distanza *infinita* *).

---

*) Le linee virgolate del testo non compariscono nella Memoria originale, bensì nella traduzione

« In tutto il campo reale che abbiamo definito, il valore di ds dato dall'equa-
« zione (1) resta sempre positivo per ogni sistema di valori dei rapporti

$$dx_1 : dx_2 : \cdots : dx_n .$$

« Se si considera un secondo sistema di incrementi $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_n$, e si pone

$$\delta s^2 = R^2 \frac{\delta x^2 + \delta x_1^2 + \cdots + \delta x_n^2}{x^2},$$

« l'espressione

$$ds^2 \delta s^2 - R^4 \frac{(dx\delta x + dx_1 \delta x_1 + \cdots + dx_n \delta x_n)^2}{x^4}$$

« non può mai divenir negativa (in virtù di una trasformazione ben nota, di cui essa è
« suscettibile): per conseguenza la quantità

$$\frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \cdots + dx_n \delta x_n)}{x^2 ds \delta s}$$

« non può mai superare l'unità. Si può dunque assegnare sempre un angolo reale θ, pel
« quale si abbia

$$dx\delta x + dx_1 \delta x_1 + \cdots + dx_n \delta x_n = \frac{x^2 ds \delta s}{R^2} \cos\theta. \tag{9}$$

« Da questa possibilità risulta l'importante conseguenza che, calcolando col mezzo
« dell'equazione (1) i tre valori di ds corrispondenti ai seguenti tre sistemi di valori
« delle variabili, considerati a due a due:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

$$(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots x_n + dx_n),$$

$$(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots x_n + \delta x_n),$$

« si trovano tre numeri atti ad esprimere le lunghezze dei tre lati di un triangolo ret-
« tilineo. Si indichino infatti con M, M', M'' gli anzidetti tre sistemi di valori, e si rap-
« presenti ds con MM', δs con MM''. I valori del sistema M'' si possono dedurre

francese pp. 351-353. Nel riprodurle quì, abbiamo creduto di esaudire un desiderio dell'A., espresso in una lettera al GENOCCHI, nella quale il BELTRAMI suggerisce una modificazione a questa sua Memoria, concordante con quella introdotta nella traduzione suddetta [V. su quella lettera la Commemorazione del BELTRAMI scritta da G. LORIA nella *Bibliotheca Mathematica*, Dritte Folge, II Band., 4 Heft (1901), pag. 419, nota]. [N. d. R.].

« da quelli del sistema M' mediante gli incrementi rispettivi

$$\delta x_1 - d x_1 ,\ \delta x_2 - d x_2 ,\ \ldots\ \delta x_n - d x_n$$

« dati a questi ultimi. Quindi trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore al secondo, « si può porre

$$\begin{aligned}\overline{M'M''}^2 &= \frac{R^2}{x^2}[(\delta x - dx)^2 + (\delta x_1 - dx_1)^2 + \cdots + (\delta x_n - dx_n)^2] \\ &= ds^2 + \delta s^2 - 2\frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \cdots + dx_n\delta x_n)}{x^2},\end{aligned}$$

« ossia, per la (9),

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 - 2\,\overline{MM'}\,.\,\overline{MM''}\,.\cos\theta\,,$$

« dove θ è un angolo reale. Quest'equazione dimostra la proprietà asserita, e fa com- « prendere come si possa assimilare ogni sistema di valori delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ « ad un *punto* definito dalle sue coordinate. Egli è nello stesso ordine di idee che « due elementi lineari ds, δs si considerano come *ortogonali*, quando per essi si ha « $\theta = \frac{\pi}{2}$, cioè, (9), quando gli incrementi d, δ ad essi relativi soddisfanno alla con- « dizione

$$dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \cdots + dx_n\delta x_n = 0\,, \tag{10}$$

« che può chiamarsi, per comodità di linguaggio, *condizione di ortogonalità* ».

Consideriamo per esempio lo spazio di $n - 1$ dimensioni $x_1 = 0$ e supponiamo che da un punto di esso escano due elementi lineari, l'uno ds esistente nello spazio stesso, l'altro δs diretto secondo la geodetica del sistema x_1 passante per questo punto. In tal caso si ha

$$x_1 = 0\,,\qquad dx_1 = 0\,,\qquad \delta x_2 = \delta x_3 = \cdots = \delta x_n = 0\,,\qquad \delta x = 0\,,$$

epperò la condizione di ortogonalità è soddisfatta: vale a dire che ciascuna geodetica del sistema x_1 (o più in generale x_r) è ortogonale allo spazio $x_1 = 0$ (risp. $x_r = 0$) nel punto in cui lo incontra. In particolare modo dunque all'origine delle coordinate le direzioni degli n assi sono tutte ortogonali fra loro. Si dimostra con eguale facilità che l'asse x_r è ortogonale a tutti gli spazî $x_r =$ cost. Le n geodetiche condotte da un punto arbitrario dello spazio nei sistemi $x_1, x_2, \ldots x_n$ riescono perpendicolari agli spazî di $n - 1$ dimensioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$, analogamente a quel che ha luogo nel piano e nell'ordinario spazio quando si usano coordinate rettangole. Chiamando $X_1, X_2, \ldots X_n$ le porzioni di queste geodetiche comprese fra il punto dato e

gli spazî cui sono rispettivamente perpendicolari, si ha

$$X_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{x^2 + x_r^2} + x_r}{\sqrt{x^2 + x_r^2} - x_r}. \tag{11}$$

Consideriamo il completo sistema delle geodetiche uscenti dal punto determinato $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$. Esso è rappresentato dal seguente sistema d'equazioni differenziali, l'ultima delle quali è una conseguenza delle prime,

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_1^0} = \frac{dx_2}{x_2 - x_2^0} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - x_n^0} = \frac{dx}{x - \frac{z}{x}},$$

dove si è posto per brevità

$$z = a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0.$$

La condizione (10) fornisce come equazione differenziale dello spazio di $n - 1$ dimensioni ortogonale a tutte queste geodetiche la seguente

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

donde integrando

$$\frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = C. \tag{12}$$

Confrontando questa equazione colla (8) si vede che lo spazio definito da essa è anche il luogo dei punti equidistanti dal punto $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, e chiamando ρ la distanza costante, si ha

$$C = \sqrt{a^2 - x_1^{0^2} - x_2^{0^2} - \dots - x_n^{0^2}} . \cosh \frac{\rho}{R} = x^0 \cosh \frac{\rho}{R}.$$

Siccome l'equazione (12), pel modo in cui fu ottenuta, sussiste anche quando il punto $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ va all'infinito, cioè quando x^0 diventa nullo e ρ infinito, così si vede che in questo caso il prodotto $x^0 \cosh \frac{\rho}{R}$ converge verso un limite finito, che non può differire da quello del prodotto $\frac{1}{2} x^0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Quindi scrivendo $\rho' - \rho$ invece di ρ e facendo andare all'infinito il punto $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, mentre ρ rimane costante, si ottiene al limite l'equazione

$$\frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}}, \tag{13}$$

dove

$$x_1^{o2} + x_2^{o2} + \cdots + x_n^{o2} = a^2,$$

e quest'equazione rappresenta un sistema di spazì ad $n - 1$ dimensioni, che possono essere definiti come le *trajettorie ortogonali di tutte le geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito* $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$. Le varie trajettorie sono distinte fra loro dai valori del parametro ρ, che esprime la distanza *costante* fra una qualunque di esse e la trajettoria determinata $\rho = 0$. La costante k è data quando è dato un punto di quest'ultima trajettoria.

Ora si dimostrerà che la natura dello spazio fin quì considerato è tale che, limitandone una porzione qualunque e trasportandola in una posizione diversa da quella che prima occupava, si può sempre ottenerne la *sovrapposizione* con un'altra porzione corrispondente dello stesso spazio. Per concepire come ciò possa accadere si immagini disseminato in quella porzione di spazio un numero ∞^n di punti, infinitamente vicini tra loro, e riuniti a due a due dagli archetti geodetici che ne misurano le mutue distanze. Ciò posto, la *sovrapponibilità* della quale si tratta consiste in questo, che in ogni altra parte dello spazio considerato si possono disseminare dei punti ad *esso appartenenti*, i quali hanno fra loro le medesime distanze mutue e la medesima disposizione che avevano quelli della porzione immaginata; dimodochè il reticolo n^{plice} formato dalle linee congiungenti i punti contigui di questa può essere completamente identificato col reticolo analogo dell'altra porzione, senza che i legami di essi devano essere in alcun punto rotti o duplicati. Le alterazioni che il primo reticolo deve subire per identificarsi col secondo non possono del resto riescire *apparenti* che quando si considerano l'uno e l'altro *in rapporto ad uno spazio avente più di n dimensioni*: finchè ciò non accade i due reticoli presentano il carattere dell'*eguaglianza* per *congruenza* o per *simmetria*. Quest'ultima osservazione si collega con un ingegnoso riflesso di MOEBIUS *).

Suppongasi dapprima riferito lo spazio ad un nuovo sistema di assi geodetici delle $y_1, y_2, \ldots y_n$, aventi la stessa origine dei primi ed ortogonali fra loro al pari di questi. Siccome tutte le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari, così è chiaro che le sostituzioni per passare dalle variabili x alle variabili y devono essere *lineari*: ma è facile convincersi inoltre che la loro forma dev'esser quella denominata *ortogonale*. Infatti la forma (8) mostra che la distanza dall'origine ad un punto qualunque $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dipende solamente dalla funzione $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Si avrà dunque

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2,$$

*) *Der barycentrische Calcul*, pag. 184 (Leipzig, 1827).

epperò

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{y^2}.$$

Questa identità di forma dei due elementi rende manifesto che due reticoli in cui i vertici corrispondenti fossero legati dalle equazioni

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad \ldots \qquad x_n = y_n$$

sarebbero perfettamente sovrapponibili. Ora è chiaro che il secondo di questi reticoli non sarebbe altro che il primo girato intorno all'origine insieme coi primitivi assi, fino a che questi prendessero le direzioni dei nuovi. È dunque provato che la sovrapponibilità di cui si parlava ha effettivamente luogo quando lo spostamento si riduce ad una semplice rotazione intorno all'origine. Anzi, siccome si potrebbe porre più generalmente

$$x_1 = \pm y_1, \qquad x_2 = \pm y_2, \qquad \ldots \qquad x_n = \pm y_n,$$

con libertà di combinare i segni in modo qualunque, così è chiaro che oltre l'eguaglianza per *congruenza* vi sono più specie d'eguaglianza per *simmetria*.

Poichè un cambiamento d'assi, restando fissa l'origine, non muta la forma dell'elemento lineare, resta ora a cercare l'effetto di un cambiamento d'origine. E poichè, preso nello spazio un punto qualunque, si può già supporre diretto verso di esso l'asse delle x_1, così è lecito prendere la nuova origine su questo stesso asse, nel punto $x_1 = a_1$. La nuova transformazione da eseguire consiste dunque nel mantenere l'asse delle x_1 ed i precedenti sistemi coordinati delle $x_2, x_3, \ldots x_n$, e nel sostituire al sistema delle geodetiche perpendicolari allo spazio $x_1 = 0$ quello delle geodetiche perpendicolari allo spazio $x_1 = a_1$, fra le quali si trova il primitivo asse delle x_1. Le nuove coordinate si chiameranno $y_1, y_2, \ldots y_n$ e si chiamerà b una costante avente, rispetto a queste, lo stesso ufficio della costante a rispetto alle x. Così si denomineranno $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ le geodetiche analoghe alla $X_1, X_2, \ldots X_n$ e si avrà manifestamente, come nella (11),

$$Y_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{y^2 + y_r^2} + y_r}{\sqrt{y^2 + y_r^2} - y_r}.$$

Ciò posto, si osservi che, rimanendo invariati i primitivi sistemi delle $x_2, x_3, \ldots x_n$, si ha dapprima, per essi, $X_r = Y_r$ e quindi

$$(14) \qquad \frac{x_r}{x} = \pm \frac{y_r}{y}, \qquad r = 2, 3, \ldots n.$$

Quadrando e sommando prima queste equazioni, poi le loro differenziali, si hanno le

due formole

$$(15)\quad \begin{cases} (a^2 - x_1^2)y^2 = (b^2 - y_1^2)x^2, \\ \dfrac{\Omega^2}{x^2} + \left(d\dfrac{a}{x}\right)^2 - \left(d\dfrac{x_1}{x}\right)^2 = \dfrac{\Theta^2}{y^2} + \left(d\dfrac{b}{y}\right)^2 - \left(d\dfrac{y_1}{y}\right)^2, \end{cases}$$

dove $\Theta^2 = dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2$. In secondo luogo se si considerano, sull'asse delle x_1, le porzioni X_1^0, Y_1^0 intercette fra le due origini e il punto in cui l'asse stesso è intersecato dallo spazio $x_1 = x_1$, si ha

$$X_1^0 = \frac{R}{2}\log\frac{a+x_1}{a-x_1}, \qquad Y_1^0 = \frac{R}{2}\log\frac{b+y_1}{b-y_1},$$

mentre la distanza delle due origini è data da

$$\frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1}.$$

È chiaro dunque che bisogna porre

$$X_1^0 = Y_1^0 + \frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1},$$

cioè

$$\frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)} = \frac{b+y_1}{b-y_1},$$

donde

$$(16)\qquad y_1 = \frac{ab(x_1-a_1)}{a^2-a_1x_1}, \qquad x_1 = \frac{a(ay_1+a_1b)}{ab+a_1y_1}.$$

Queste due formole dànno luogo alle relazioni

$$(17)\quad a^2 - x_1^2 = \frac{a^2(a^2-a_1^2)(b^2-y_1^2)}{(ab+a_1y_1)^2}, \qquad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2(a^2-a_1^2)(a^2-x_1^2)}{(a^2-a_1x_1)^2},$$

le quali, combinate opportunamente colla prima delle (15), conducono a queste altre due

$$\frac{a}{x}\sqrt{a^2-a_1^2} = a\frac{b}{y} + a_1\frac{y_1}{y},$$

$$\frac{x_1}{x}\sqrt{a^2-a_1^2} = a_1\frac{b}{y} + a\frac{y_1}{y},$$

donde

$$\left(d\frac{a}{x}\right)^2 - \left(d\frac{x_1}{x}\right)^2 = \left(d\frac{b}{y}\right)^2 - \left(d\frac{y_1}{y}\right)^2.$$

In virtù di quest'ultima equazione, la seconda delle (15) dà

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{y^2},$$

donde consegue che l'espressione dell'elemento lineare conserva la stessa forma anche mutando l'origine, e quindi, per un ragionamento analogo a quello di pocanzi, che la sovrapponibilità ha luogo in ogni caso, poichè basterebbe ora far uso di una nuova sostituzione ortogonale per rendere i nuovi assi affatto indipendenti dai primi.

Le (14), (15, 1ª), (17) dànno

$$x_r = \pm \frac{a y_r \sqrt{a^2 - a_1^2}}{ab + a_1 y_1}, \qquad r = 2, 3, \ldots n,$$

da cui e dalla (16, 2ª) si conclude che la più generale trasformazione d'assi ha luogo per mezzo di *sostituzioni omografiche.*

Prescindendo da questa trasformazione delle coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ in altre della stessa specie, vi sono altre trasformazioni che dànno all'elemento una forma notabile. Quella che si potrebbe chiamar *polare* si ottiene ponendo primieramente

$$x_1 = r\lambda_1, \quad x_2 = r\lambda_2, \ldots \; x_n = r\lambda_n,$$

colla condizione $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$. Di qui si ricava

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = dr^2 + r^2 d\Lambda^2,$$

dove $d\Lambda^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \cdots + d\lambda_n^2$, epperò

$$ds^2 = \left(\frac{R\,a\,dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2}\, d\Lambda^2.$$

Ma chiamando ρ la distanza geodetica dall'origine, o polo, al punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, si ha

$$\frac{R\,a\,dr}{a^2 - r^2} = d\rho, \qquad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \operatorname{sen\,h}^2 \frac{\rho}{R},$$

dunque

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \operatorname{sen\,h} \frac{\rho}{R}\right)^2 d\Lambda^2, \tag{18}$$

forma che giustifica la denominazione di *polare,* poichè in essa le variabili sono il raggio vettore ρ, e le quantità λ che definiscono la direzione di questo raggio.

Da questa forma si passa facilmente ad un'altra che si potrebbe chiamare *stereogra-*

fica, e che si ottiene ponendo

$$\xi_r = 2R \operatorname{tg h} \frac{\rho}{2R} \cdot \lambda_r ,$$

dove ρ e λ_r hanno i significati di pocanzi. Di quì si cava

$$\lambda_r d\rho + R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R} \cdot d\lambda_r = d\xi_r \cdot \cos \mathrm{h}^2 \frac{\rho}{2R} ,$$

$$\cos \mathrm{h}^2 \frac{\rho}{2R} = \frac{1}{1 - \dfrac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}{4R^2}} ,$$

e quindi, quadrando e sommando le equazioni che risultano dalla penultima col fare $r = 1, 2, \ldots n$, con riguardo all'ultima ed alla (18),

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \cdots + d\xi_n^2}}{1 - \dfrac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}{4R^2}} . \tag{19}$$

Questa forma è stata indicata, senza dimostrazione, da Riemann nella citata Memoria postuma (II, § 4).

Riemann ha indicato un altro sistema di coordinate, dal quale egli trae la misura delle curvature di un dato spazio intorno ad un punto (II, § 2). Queste coordinate sono per certi rispetti analoghe alle ortogonali cartesiane, poichè si ottengono dalle polari col porre

$$z_1 = \rho\lambda_1 , \qquad z_2 = \rho\lambda_2 , \ \ldots , \ z_n = \rho\lambda_n .$$

Da queste si ha

$$d\lambda_r = \frac{\rho\, dz_r - z_r\, d\rho}{\rho^2} ,$$

epperò, quadrando e sommando,

$$d\Lambda^2 = \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2)(dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_n^2) - (z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + \cdots + z_n dz_n)^2}{\rho^4} ,$$

ossia

$$d\Lambda^2 = \frac{\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^4} ,$$

dove il segno $\sum$ comprende tutte le combinazioni binarie degli indici. Si ha pure

$$d\rho^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_n^2 - \frac{\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^2} ,$$

laonde, sostituendo nella (18), si ottiene finalmente

$$(20)\qquad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_n^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{R}{\rho}\operatorname{sen h}\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1\right]\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

ossia

$$(20')\qquad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2}\left(1 + \frac{2\rho^2}{15R^2} + \cdots\right)\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

dove $\rho^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$, e dove la serie convergente posta fra parentesi procede secondo le potenze crescenti di $\frac{\rho}{R}$. Per piccolissimi valori di ρ si può prendere semplicemente

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \cdots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2}\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2.$$

Ora considerando un elemento di superficie passante per l'origine, si può fare in modo (con un'opportuna scelta degli assi $z_1, z_2, \ldots$, ossia $x_1, x_2, \ldots$) che esso coincida con quello della *superficie* $z_3 = 0$, $z_4 = 0$, $\ldots$ $z_n = 0$, alla quale corrisponde, nelle vicinanze dell'origine, l'elemento lineare

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{1}{3R^2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2;$$

e poichè l'area del triangolo infinitesimo che ha i vertici nei punti $(0, 0)$, (z_1, z_2), (dz_1, dz_2), dei quali *il secondo* è infinitamente vicino all'origine, è uguale ad $\frac{1}{2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, se ne conclude che $\sum (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$ è eguale al quadruplo del quadrato dell'area del triangolo infinitesimo che ha i vertici nei punti $(0, 0, \ldots 0)$, $(z_1, z_2, \ldots z_n)$, $(dz_1, dz_2, \ldots dz_n)$, *il secondo* dei quali è infinitamente vicino all'origine. Se dunque si divide la somma dei termini di 4° ordine nella (20') per il quadrato dell'area del triangolo infinitesimo anzidetto, si ha il quoziente $\frac{4}{3R^2}$; e poichè, secondo la definizione di RIEMANN, tale quoziente moltiplicato per $-\frac{3}{4}$ esprime la misura della curvatura nel senso dell'elemento superficiale anzidetto, si vede che nello spazio quì considerato tale misura è costante ed uguale a $-\frac{1}{R^2}$ in ogni direzione intorno a ciascun punto *). Egli è perciò che questo spazio può acconciamente esser chiamato di *curvatura costante*.

---

*) Per vedere la coincidenza della definizione di RIEMANN con quella di GAUSS, si rammenti che, secondo GAUSS, la misura della curvatura della superficie definita dall'elemento

$$ds^2 = d\rho^2 + m^2\, d\theta^2$$

Una quarta trasformazione, importantissima, è quella che si ottiene introducendo n nuove variabili indipendenti $\eta, \eta_1, \ldots \eta_{n-1}$ e ponendo

$$\frac{R x}{a - x_n} = \eta, \qquad \frac{R x_1}{a - x_n} = \eta_1, \qquad \ldots \qquad \frac{R x_{n-1}}{a - x_n} = \eta_{n-1}.$$

Se ne trae immediatamente

$$ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + \cdots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta}, \tag{21}$$

donde si conclude intanto che la formola (1) rappresenta l'elemento lineare di uno spazio di curvatura costante anche quando le $n + 1$ variabili $x, x_1, \ldots x_n$ sono indipendenti fra loro e non punto legate dalla relazione (2), salvo che in questo caso il numero delle dimensioni dello spazio è $n + 1$ e non sussiste più la proprietà che le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari *). Ma una conseguenza assai notabile che si deduce dalla espressione (21) è che lo spazio ad $n - 1$ dimensioni $\eta =$ cost. ha la sua curvatura *nulla* in ogni punto, poichè il suo elemento lineare ha la forma

$$ds = \text{cost.} \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \cdots + d\eta_{n-1}^2}.$$

Ed infatti, se si pon mente alla formola di Riemann (19), si vede subito che l'elemento non può ridursi ad essere la radice quadrata della somma dei quadrati di tanti diffe-

---

è espressa da $-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial \rho^2}$, m essendo funzione in generale di ρ e di θ. Se la variabile ρ è la lunghezza di un arco geodetico uscente da un punto della superficie nel quale questa abbia una curvatura ordinaria, la funzione m è della forma $m = \rho(1 + m'\rho^2)$ dove m' è una funzione che per $\rho = 0$ non è nè nulla nè infinita [vegghansi p. es. Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. I (1867), pag. 358; oppure queste Opere, vol. I, pag. 342], e quindi la misura della curvatura nel punto $\rho = 0$ è uguale a $-6m'_0$. Ciò posto, le coordinate di Riemann

$$z_1 = \rho \cos\theta, \qquad z_2 = \rho \operatorname{sen}\theta$$

dànno all'elemento testè considerato la forma

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4}\left(\frac{z_1\, dz_2 - z_2\, dz_1}{2}\right)^2,$$

epperò la misura della curvatura nel punto $\rho = 0$ è, secondo Riemann, $-\frac{3}{4}\lim \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4}$. Ora $\lim_{\rho=0} \frac{m^2 - \rho^2}{\rho^4} = 2m'_0$; dunque le due espressioni coincidono.

È chiaro che m'_0, cioè $(m')_{\rho=0}$, dev'essere una quantità indipendente da θ.

*) La forma (21) è stata indicata, per il caso di due sole dimensioni, dal sig. Liouville, nelle sue note all'opera *Application de l'Analyse à la Géométrie* di Monge, pag. 600 (Paris, 1850).

renziali esatti quante sono le dimensioni, se non si abbia $\frac{1}{R} = 0$. Lo spazio $\eta = \text{cost.}$ è dunque uno di quelli che RIEMANN denomina *piani* (II, § 1), e nei quali rientrano il piano e lo spazio ordinario, definiti dalle formole

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ora l'equazione $\eta = \text{cost.}$ ammette una molto semplice interpretazione, dietro quanto precede. Il punto all'infinito sull'asse delle x_n ha per coordinate

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0, \qquad x_n = a,$$

e quindi l'equazione (13) diventa per esso

$$\frac{a - x_n}{x} = k' e^{-\frac{\rho}{R}},$$

dove $k' = \frac{k}{a}$. Dunque

$$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{R}},$$

epperò l'equazione $\eta = \text{cost.}$ equivale a quest'altra $\rho = \text{cost.}$, donde si conclude (poichè è arbitraria la direzione dell'asse delle x_n) che lo spazio ad $n - 1$ dimensioni $\eta = \text{cost.}$ non è altro che una delle trajettorie ortogonali di tutte le geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito, cioè di un sistema di geodetiche *parallele* fra loro. Reciprocamente ciascuna di queste trajettorie ortogonali ha in ogni punto la curvatura nulla, epperò due qualunque di esse (appartenenti o meno al medesimo sistema) sono sovrapponibili l'una all'altra in tutti i modi possibili.

Introducendo nella (21) la variabile ρ al posto della η, si ha l'altra forma equivalente

$$(21') \qquad ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} (d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \cdots + d\eta_{n-1}^2).$$

Si è già veduto che il complesso di $n - 1$ equazioni lineari fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ rappresenta una linea geodetica. Vediamo cosa rappresenti, più in generale, il complesso di $n - m$ equazioni lineari.

Supponendo dedotte da queste equazioni le espressioni di $n - m$ coordinate in funzione delle rimanenti m, riesce manifesto che il numero dei parametri indipendenti contenuti in un tal sistema è $(m + 1)(n - m)$. Si immagini ora che tutte le n coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ vengano espresse linearmente in funzione di m variabili $u_1, u_2, \ldots u_m$. Queste espressioni comprendono fra tutte $(m + 1) n$ parametri, ma se si assoggettano

questi parametri a verificare l'identità

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 + h^2,$$

(h restando indeterminata), è chiaro che si aggiungono con ciò $\frac{m(m+1)}{2} + m$ condizioni, talchè il numero dei parametri indipendenti rimane di $(m+1)n - \frac{m(m+1)}{2} - m$. Ora questo numero eccede di $\frac{m(m-1)}{2}$ il numero $(m+1)(n-m)$; dunque le relazioni ammesse fra le x e le u, colla indicata condizione, sono tali da poter sempre tener luogo, senza restrizione alcuna, del dato sistema di $n-m$ equazioni. Ciò posto, da quelle relazioni, ponendo

$$u^2 + u_1^2 + \cdots + u_m^2 = a^2 - h^2 = a'^2,$$

si deduce

$$dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = du^2 + du_1^2 + \cdots + du_m^2,$$

$$x^2 = u^2,$$

dunque

$$ds = R\,\frac{\sqrt{du^2 + du_1^2 + \cdots + du_m^2}}{u},$$

colla condizione

$$u^2 + u_1^2 + \cdots + u_m^2 = a'^2.$$

Conseguentemente il luogo dei punti rappresentati dal complesso delle $n-m$ equazioni lineari fra le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ è uno spazio ad m dimensioni, la cui curvatura è dovunque costante ed eguale a quella dello spazio primitivo.

Così per es. $n-2$ equazioni lineari rappresentano una *superficie* di curvatura costante $\left(\text{uguale a } -\frac{1}{R^2}\right)$, che conviene distinguere col nome di *superficie di prim'ordine*; $n-3$ rappresentano uno *spazio a tre dimensioni* di curvatura costante $\left(\text{uguale a } -\frac{1}{R^2}\right)$; ecc.

Una linea geodetica reale è individuata senza ambiguità da *due* punti dello spazio: nelle ipotesi fin quì ammesse non è possibile alcuna eccezione a questa proprietà.

Una superficie di prim'ordine è individuata senza ambiguità da *tre* punti dello spazio. Essa contiene tutta intera la geodetica che passa per due suoi punti reali, talchè se due superficie reali di prim'ordine hanno due punti reali in comune, hanno del pari in comune tutta la geodetica individuata da questi.

Un triangolo geodetico giace sempre sopra una determinata superficie di prim'ordine, la quale è individuata anche quando il triangolo è infinitesimo. Perciò se si prolungano secondo linee geodetiche tutti gli elementi lineari contenuti in uno stesso ele-

mento di superficie, le linee geodetiche così ottenute hanno tutte un luogo geometrico che è una determinata superficie di prim'ordine.

Quando due superficie di prim'ordine si intersecano lungo una linea, necessariamente geodetica, il loro angolo è dovunque costante; cioè condotti da un punto della loro intersezione due elementi lineari normali ad essa, l'uno nella prima, l'altro nella seconda superficie, la distanza infinitesima dei loro termini è costante, se sono costanti le loro lunghezze. Infatti *) supposto diretto l'asse x_1 secondo la comune sezione delle due superficie, le equazioni di queste possono evidentemente esser messe sotto la forma

$$(x_2 = m_2 x_n, \quad x_3 = m_3 x_n, \ \dots \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n),$$

$$(x_2 = m'_2 x_n, \quad x_3 = m'_3 x_n, \ \dots \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x_n),$$

dove le m, m' sono parametri costanti. Queste due superficie sono intersecate dallo spazio $x_1 = a_1$ secondo due geodetiche che, per una precedente osservazione, sono ortogonali all'asse x_1. I due punti di coordinate

$$(x_1 = a_1, \quad x_2 = m_2 x_n, \quad \dots \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n, \quad x_n = x_n),$$

$$(x_1 = a_1, \quad x_2 = m'_2 x'_n, \quad \dots \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x'_n, \quad x_n = x'_n),$$

giacciono rispettivamente sulla prima e sulla seconda superficie, e precisamente sulle due geodetiche anzidette, e la loro distanza ρ è data, (8), dalla formola

$$\cos\text{h}\,\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - a_1^2 - M x_n x'_n}{\sqrt{(a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2)(a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2)}},$$

dove si è posto

$$m^2 = 1 + m_2^2 + \cdots + m_{n-1}^2, \qquad m'^2 = 1 + m_2'^2 + \cdots + m_{n-1}'^2,$$

$$M = 1 + m_2 m'_2 + \cdots + m_{n-1} m'_{n-1}.$$

Da essa, chiamando σ, σ' le lunghezze delle due geodetiche comprese fra il punto comune $x_1 = a_1$ ed i due punti considerati, si trae

$$\cos\text{h}\,\frac{\sigma}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \qquad \cos\text{h}\,\frac{\sigma'}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

e quindi

$$\text{sen}\,\text{h}\,\frac{\sigma}{R} = \frac{m x_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \qquad \text{sen}\,\text{h}\,\frac{\sigma'}{R} = \frac{m' x'_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

*) La seguente dimostrazione, che poteva a rigore essere omessa, si è inserita in grazia delle formole a cui conduce.

valori i quali mostrano che

$$\cos h \frac{\rho}{R} = \cos h \frac{\sigma}{R} \cos h \frac{\sigma'}{R} - \frac{M}{m\,m'} \operatorname{sen} h \frac{\sigma}{R} \operatorname{sen} h \frac{\sigma'}{R} .$$

Siccome in questa formola non resta più traccia del punto a_1 preso sull'asse x_1, così si vede che da qualunque punto di questo asse si conducano nelle due superficie le geodetiche di lunghezza σ, σ', la distanza geodetica dei loro estremi è sempre costante. E poichè questa proprietà sussiste per lunghezze σ, σ' qualunque, necessariamente sussiste per lunghezze infinitesime, donde scaturisce il teorema annunciato.

Ricordando che in virtù di ciò che fu dimostrato precedentemente i triangoli infinitesimi sono soggetti alle relazioni della ordinaria trigonometria piana, si riconosce immediatamente, rendendo infinitesime le lunghezze ρ, σ, σ', che $\frac{M}{m\,m'}$ è il coseno dell'angolo fatto dai primi elementi delle due geodetiche σ, σ', cioè delle due superficie. D'altra parte è facile vedere che il triangolo ora considerato può essere un triangolo geodetico interamente arbitrario; dunque fra i lati a, b, c e gli angoli opposti A, B, C di un triangolo geodetico esistente nello spazio considerato, sussiste la relazione

$$\cos h \frac{a}{R} = \cos h \frac{b}{R} \cos h \frac{c}{R} - \operatorname{sen} h \frac{b}{R} \operatorname{sen} h \frac{c}{R} \cos A , \tag{22}$$

insieme colle sue analoghe, la quale non differisce dalla formola fondamentale della trigonometria sferica che per il cambiamento di R in $R\sqrt{-1}$ (R raggio della sfera), rimanendo invariati i lati e gli angoli. Ciò concorda pienamente con un fatto già avvertito dal MINDING *) e dimostrato dal CODAZZI **), se si rammenta che il triangolo geodetico quì considerato giace intieramente sopra una superficie di prim'ordine, cioè di curvatura costante negativa, rispetto alla quale esso è pure geodetico nel senso ordinario. Se si suppone retto l'angolo C, le due formole che si deducono dalla (22) colla permutazione degli elementi dànno, opportunamente combinate,

$$\operatorname{tg} h \frac{a}{R} = \operatorname{tg} h \frac{c}{R} \cos B . \tag{23}$$

Se ora si imagina che il vertice dell'angolo A vada indefinitamente allontanandosi sul cateto b, mentre il lato a rimane invariato di posizione e di grandezza, l'ipotenusa c crescerà fino all'infinito, ed a questo limite le equazioni (22), (23) daranno

$$\cos A = 1 , \qquad \operatorname{tg} h \frac{a}{R} = \cos B .$$

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XX (1840), pag. 323.

**) Annali di scienze matematiche e fisiche (del TORTOLINI), t. VIII (1857), pag. 346.

La prima formola insegna che $A = 0$, cioè che i due lati b, c si accostano asintoticamente, quando il vertice dell'angolo A è all'infinito; la seconda che il limite dell'angolo B non è l'angolo retto, come nel piano, ma un angolo minore di $90°$, la cui grandezza dipende dalla distanza a, mediante la formola

$$\mathrm{tg}\,\frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}} \tag{24}$$

(equivalente alla superiore). Se si chiamano *parallele* due geodetiche convergenti verso un medesimo punto all'infinito, come già si è fatto, si vede dunque che da un punto si possono condurre *due* distinte geodetiche parallele ad una geodetica data, che queste due parallele sono egualmente inclinate da una parte e dall'altra della geodetica condotta dallo stesso punto normalmente alla data, e che la loro inclinazione B sulla normale è legata alla lunghezza a di questa stessa normale mediante la relazione (24). Questo risultato s'accorda pienamente con quello che forma la base fondamentale della *geometria non-euclidea,* i cui principî, già famigliari a Gauss, sono stati compendiati maestrevolmente da Lobatschewsky *) sotto una veste sintetica. La possibilità della sua costruzione col mezzo dell'ordinaria sintesi (limitatamente allo spazio di tre dimensioni) dipende in primo luogo da ciò che, come si è dimostrato, negli spazî di curvatura costante (positiva o negativa) ogni figura può essere mutata arbitrariamente di posizione senza subire alcuna alterazione nella grandezza e nella disposizione mutua dei suoi elementi contigui, *possibilità* da cui dipende l'*esistenza delle figure eguali* e quindi la *validità del principio di sovrapposizione.* In secondo luogo negli spazî di curvatura costante *negativa* le geodetiche sono caratterizzate, come la retta euclidea, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da *due* soli dei loro punti, talchè vige per esse l'*assioma della retta.* E del pari le superficie di prim'ordine sono caratterizzate, come il piano euclideo, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da tre soli dei loro punti, talchè vige per esse l'*assioma del piano.* Inoltre le relazioni delle linee geodetiche colle superficie di prim'ordine e di queste fra loro, sono le stesse di quelle delle rette coi piani e dei piani fra loro, poichè una di quelle superficie contiene tutta una geodetica tosto che ne contiene due punti, e due di quelle superficie si segano secondo una geodetica (e sotto un angolo costante) se s'incontrano in un solo punto. Da questa corrispondenza consegue che se si ammettono gli assiomi fondamentali della geometria ordinaria, escludendo il postulato delle parallele, i teoremi che si ottengono sono eguali a quelli della geometria dello spazio di curvatura costante negativa, poichè questa seconda geometria ha le stesse basi di quella, tranne il postulato anzidetto. I teo-

---

*) *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (trad. Hoüel), Paris, 1866.

remi di essa sussistono per ogni valore della curvatura, che è il *parametro* della geometria non-euclidea (la quale io propongo di denominare *pseudosferica*), e le *sole misure* prese nello spazio obbiettivo possono far riconoscere che il valore speciale della sua curvatura è *zero*, cioè che $R = \infty$ per esso; nello stesso modo che per *sole misure* si può assegnare la curvatura di una sfera data, che è il *parametro* della geometria *sferica*.

Effettivamente si può verificare che la teoria di LOBATSCHEWSKY coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa. Chi ami vedere sviluppata questa corrispondenza ne potrà trovare altrove una più minuta esposizione *). Qui, per non fare una troppo lunga digressione, mi limiterò ad alcuni cenni sommarii.

La planimetria non-euclidea non è altro che la geometria delle superficie di curvatura costante negativa. Le circonferenze di quella corrispondono alle linee che tagliano ortogonalmente tutti i raggi geodetici uscenti da uno stesso punto della superficie, ossia alle circonferenze geodetiche. Il perimetro ne è dato in funzione del raggio geodetico r dalla formola

$$\pi R\left(e^{\frac{r}{R}} - e^{-\frac{r}{R}}\right),$$

come aveva già enunciato GAUSS. Per tre punti della superficie non si può sempre far passare una circonferenza geodetica avente il centro in un punto reale. Gli *oricicli* o *curve-limiti* di LOBATSCHEWSKY non sono altro che le circonferenze geodetiche il cui centro è all'infinito, cioè i cui raggi formano un sistema di geodetiche parallele. Facendo nella (21') $n = 2$ si ha

$$ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} d\eta^2,$$

espressione dell'elemento lineare della superficie di curvatura costante negativa riferita ad un sistema di oricicli concentrici ed ai loro raggi. La forma di quest'espressione insegna che gli oricicli possono diventare, mercè una flessione opportuna della superficie, i paralleli della superficie di rotazione il cui meridiano è la curva delle tangenti di lunghezza costante uguale ad R.

La stereometria non-euclidea non è altro che la geometria degli spazii a tre dimensioni di curvatura costante negativa. Si è già detto a che corrispondano, in questa geometria, le rette ed i piani. Alle superficie sferiche corrispondono le superficie che

*) Si vegga il Giornale di Matematiche di Napoli, vol. VI (1868), pag. 284; oppure queste OPERE, vol. I, pag. 374, dove le particolarità svolte per il caso di due dimensioni si possono agevolmente ripetere per quello di tre, massime se si tien conto dei risultati del presente scritto e se si ricorre ad una sfera ausiliare.

tagliano ortogonalmente tutti i raggi geodetici uscenti da uno stesso punto, cioè le sfere geodetiche. Anche quì può darsi che per tre punti, e molto più per quattro, non si possa far passare una sfera geodetica col centro in un punto reale. Le *orisfere* o *superficie-limiti* di LOBATSCHEWSKY *) non sono altro che le sfere geodetiche il cui centro è all'infinito, cioè i cui raggi formano un sistema di geodetiche parallele dello spazio di curvatura costante negativa. Facendo nella (21) $n = 3$ si ha

$$ds = R\frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + d\eta_2^2}}{\eta}, \tag{25}$$

dove

$$\frac{Rx}{a - x_3} = \eta, \qquad \frac{Rx_1}{a - x_3} = \eta_1, \qquad \frac{Rx_2}{a - x_3} = \eta_2,$$

e reciprocamente

$$x_1 = \frac{2aR\eta_1}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}, \qquad x_2 = \frac{2aR\eta_2}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2},$$

$$x_3 = \frac{a(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - R^2)}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}.$$

La formola (25) rappresenta l'elemento lineare dello spazio non-euclideo riferito ad un sistema di orisfere concentriche ed a quello dei loro raggi. La forma di questo elemento insegna che ogni orisfera, essendo rappresentata da $\eta =$ cost., è una superficie di curvatura *nulla,* poichè il suo elemento lineare ha la forma

$$ds = \text{cost.}\sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2};$$

e che le variabili η_1, η_2 sono le coordinate *rettangole* dei suoi punti. Una superficie di prim'ordine

$$lx_1 + mx_2 + nx_3 + p = 0$$

è rappresentata in coordinate η, η_1, η_2 dall'equazione

$$2aR(l\eta_1 + m\eta_2) + (an + p)(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) = (an - p)R^2,$$

epperò taglia l'orisfera (per la quale $\eta =$ cost.) secondo un cerchio. Questo si riduce ad una retta solamente quando $p = -an$, cioè quando l'equazione della superficie di prim'ordine ha la forma

$$lx_1 + mx_2 + n(x_3 - a) = 0,$$

---

*) Ossia le superficie F di J. BOLYAI.

il che accade quand'essa è una superficie *diametrale* dell'orisfera, ossia passa pel centro (all'infinito) di questa. In questo caso la linea d'intersezione è evidentemente un oriciclo di questa superficie diametrale, mentre rispetto all'orisfera è tale che si converte in una retta quando questa venga distesa secondo un piano. Di quì emerge che il triangolo tracciato sopra un'orisfera da tre superficie diametrali è in sostanza un triangolo geodetico esistente in una superficie di curvatura nulla, il quale perciò soddisfa a tutte le relazioni dell'ordinaria trigonometria piana, poichè è esattamente applicabile sopra un triangolo rettilineo.

Così tutti i concetti della geometria non-euclidea trovano un perfetto riscontro nella geometria dello spazio di curvatura costante negativa. Solamente fa d'uopo osservare che mentre quelli relativi alla semplice planimetria ricevono in tal modo un'interpretazione vera e propria, poichè diventano *costruibili* sopra una superficie *reale*, quelli all'incontro che abbracciano tre dimensioni non sono suscettibili che di una rappresentazione analitica, poichè lo spazio in cui tale rappresentazione verrebbe a concretarsi è diverso da quello cui generalmente diamo tal nome. Per lo meno l'esperienza non sembra poter essere messa d'accordo coi risultati di questa geometria più generale, se non si suppone infinitamente grande la costante R, cioè *nulla* la curvatura dello spazio; il che per altro potrebbe non essere dovuto che alla piccolezza dei triangoli che noi possiamo misurare, ossia alla piccola estensione dello spazio a cui le nostre osservazioni si estendono, non altrimenti da ciò che accade per le misure prese sopra una piccola parte di superficie terrestre, la precisione delle quali non è sufficiente a mettere in evidenza la sfericità del globo.

Fin quì non si è parlato che di spazî ad n dimensioni la cui curvatura è costante, ma *negativa;* del che è causa l'aversi avuto principalmente in vista il ravvicinamento dei concetti ad essi relativi con quelli della geometria non-euclidea, rispetto alla quale l'ipotesi opposta ha minore interesse. Nondimeno se ne diranno quì alcune poche cose.

L'elemento lineare

$$ds = R\frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx^2}}{x}, \tag{26}$$

dove

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

appartiene ad uno spazio di n dimensioni la cui curvatura è dovunque costante ed uguale ad $\frac{1}{R^2}$. Esso si ottiene da (1) mutando R, a ed x in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, e tutte le proprietà e le equazioni fondate sopra mere trasformazioni analitiche dell'elemento (1) valgono evidentemente, coi cambiamenti indicati, anche per quest'altro. Per es. la (8) si muta nella seguente

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \cdots + x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)(a^2 + x_1^{02} + \cdots + x_n^{02})}}, \tag{27}$$

formola che dà per ρ un valore reale, qualunque siano i valori reali di $x_1, x_2, \ldots x_n$; $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$. È chiaro che per questi spazî sussiste integralmente il teorema della sovrapponibilità di due loro porzioni qualunque.

Se nella (26) si suppongono reali le variabili $x, x_1, \ldots x_n$ e le costanti R, a, i valori ammissibili per le coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ non hanno limite alcuno, e possono variare fra $-\infty$ e $+\infty$. Per tutti i valori reali di queste coordinate lo spazio è *continuo* e *semplicemente connesso, ma non infinito* (RIEMANN, III, § 2), perchè se si fa nella (27)

$$x_1^0 = \lambda_1 \tau, \qquad x_2^0 = \lambda_2 \tau, \qquad \ldots \qquad x_n^0 = \lambda_n \tau,$$

dove $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1$, si ha per $\tau = \infty$,

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}},$$

formola che dà per ρ un valore finito e determinato. Le linee geodetiche continuano ad essere rappresentate da equazioni lineari, ma, stante l'ammissibilità dei valori infiniti per le coordinate, il principio che *due* punti individuano senza ambiguità una geodetica *cessa* d'esser vero *senza restrizione*. Infatti siano

$$x_1 = b_1 x_n + b_1', \qquad x_2 = b_2 x_n + b_2', \qquad \ldots$$

le equazioni d'una geodetica. Finchè uno almeno dei punti pei quali essa deve passare ha le sue coordinate finite, i coefficienti possono esser tutti determinati senza ambiguità. Ma se ambedue i punti hanno coordinate infinite bisogna mettere le equazioni sotto la forma

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b_1'}{x_n}, \qquad \frac{x_2}{x_n} = b_2 + \frac{b_2'}{x_n}, \qquad \ldots$$

e sostituire ai primi membri i valori limiti a cui convergono nei due punti. Se questi limiti sono eguali in entrambi, i valori dei secondi coefficienti restano indeterminati e la linea geodetica *non* è più unica ed individuata. Se poi i limiti sono diversi le coordinate della linea geodetica sono infinite in ogni punto.

Le considerazioni che hanno condotto all'equazione (13) non sono applicabili agli spazî di curvatura costante positiva, poichè non esistono, per questi, punti all'infinito. Quindi gli enti rappresentati da quella equazione non hanno riscontro in questi nuovi spazî, come non lo hanno le geodetiche reciprocamente *parallele*.

Si vede che la geometria degli spazî di curvatura costante positiva [che può acconciamente esser chiamata *geometria sferica* in senso largo, stantechè, come insegna l'equazione (22), i triangoli geodetici vi soggiacciono alle leggi della trigonometria sferica], differisce molto notabilmente dalla *pseudosferica,* sebbene abbia con questa in comune l'esistenza delle figure eguali. Del resto la geometria pseudosferica conduce spontaneamente a considerare gli spazî di curvatura costante positiva. Infatti ponendo nella (26)

$$\frac{a}{x} = y, \qquad \frac{x_1}{x} = y_1, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x} = y_n,$$

si trova

$$ds = R\sqrt{dy^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_n^2},$$

colla condizione

$$y^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1,$$

risultato il quale, posto a riscontro colla equazione (18) in cui siasi fatto $\rho =$ cost., insegna che le sfere geodetiche di raggio ρ nello spazio ad n dimensioni di curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ sono spazî ad $n-1$ dimensioni di curvatura costante positiva $\left(\frac{1}{R \operatorname{sen h} \frac{\rho}{R}}\right)^2$. Quindi la geometria sferica può riguardarsi come contenuta nella pseudosferica.

Bologna, agosto 1868.

XXVI.

DUE LETTERE A J. A. GRUNERT.

I.

SOPRA UN TEOREMA DI GRUNERT *).

Archiv der Mathematik und Physik, Theil XLII (1864), pag. 117.

. . . .

Pour ce qui est du théorème fondamental, il est sans doute très remarquable, surtout si on le rapproche de celui que GAUSS a donné relativement à la mesure de la courbure et qui n'en devient que plus important et plus significatif. Je remarque que sa vérité peut être rendue presque évidente par la considération de l'indicatrice, qui, dans l'hypothèse $T < 0$ **), est une ellipse. Soit en effet ρ un des rayons de cette ellipse. Le rayon de courbure R de la section normale correspondante peut être désigné par ρ^2, et par suite on a, suivant vos notations,

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{M}}(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \rho^2\, d w\,.$$

Or $\rho^2 d w$ est le double du secteur elliptique compris entre deux rayons infiniment

*) *La media aritmetica dei raggi di curvatura di tutte le sezioni normali di una superficie in un punto ellittico è la media geometrica fra il minimo e il massimo raggio di curvatura in quel punto.* — Il teorema trovasi enunciato nell' «Archiv der Mathematik und Physik», Theil XLI (1864), pp. 292-293. [N. d. R.].

**) Corrispondente a un punto ellittico. [N. d. R.].

proches $\rho(w)$ et $\rho(w + dw)$, donc $\int_0^{2\pi} \rho^2 \, dw$ est l'aire totale de l'ellipse, $\pi\sqrt{R'R''}$, d'où

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{M}}(R) = \sqrt{R'R''}.$$

Mais très probablement cette remarque ne vous a pas échappé, bien que vous ayez préféré, et avec raison, de démontrer le théorème à l'aide des seules formules fondamentales de la théorie des surfaces, sans vous appuyer sur des notions moins simples ou moins directes. Celles-ci, du reste, pourraient se tirer bien facilement de vos formules, dans lesquelles elles sont implicitement contenues, ainsi que beaucoup d'autres dont vous avez peut-être donné le développement dans le Mémoire intitulé : *Allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen*, que vous citez au commencement de celui-ci, et que je regrette de ne pas connaître.

Pise, 20 avril 1864.

II.

SOPRA UN TEOREMA DELL'AUTORE *).

Archiv der Mathematik und Physik, Theil XLIII (1865), pp. 481-483.

. . . .

J'ai reçu de même deux envois de feuilles séparées de votre « Archiv » contenant des démonstrations de quelques théorèmes de géométrie donnés par moi dans un de mes travaux. Je vous remercie infiniment de la peine que vous avez prise d'appeler l'attention des géomètres sur ces théorèmes, et beaucoup plus encore du soin que vous avez voulu prendre d'en chercher les démonstrations par la voie purement analytique

*) Si allude al teorema : *Se per i tre vertici di un triangolo si conducono tre rette parallele, indi tre nuove rette formanti colle bissettrici degli angoli del triangolo angoli rispettivamente eguali a quelli delle precedenti, queste tre ultime rette si incontrano in uno stesso punto, situato nella circonferenza circoscritta al triangolo.* (Vedi queste OPERE, t. I, pag. 62, nota). [N. d. R.].

en y déployant votre élégance accoutumée. J'avais, il y a quelques années de cela, développé par l'analyse trigonométrique les nombreuses relations auxquelles donne lieu la considération du triangle rectiligne, des centres de ses cercles inscrits, exinscrits et circonscrits, etc. Mais la plus grande partie de ces relations ayant été trouvée par d'autres, il serait inutile de publier mon travail. Je dois citer, en particulier, comme très riche en résultats, le petit mémoire de M. NOEGGERATH cité par ce même auteur à la page 89 de vos Archives, t. XLIII. L'extension à l'espace de trois dimensions a été, presque en même temps, l'objet de deux travaux, l'un de M. PROUHET *) et l'autre de moi-même **). Je crois vous avoir envoyé un exemplaire de ce dernier article. Mais la matière est loin d'être épuisée. Pour moi, il m'est impossible de m'en occuper à présent.

En réfléchissant de nouveau sur le théorème démontré par vous, page 102, t. XLIII ***), j'ai reconnu qu'on peut le rendre évident par les éléments de géométrie de la manière suivante. Soit ABC le triangle donné †), auquel je circonscris un cercle. Prenant les milieux A', B', C' des arcs soustendus par les côtés BC, CA, AB respectivement et joignant AA', BB', CC', j'obtiens les bissectrices internes du triangle. Cela fait, soient AD, BE, CF les parallèles menées des sommets suivant une certaine direction. Pour mener par A une droite faisant avec AA' le même angle que AD, il suffit évidemment de prendre un arc $A'J = A'D$ et de joindre AJ. De même, pour mener de B une droite faisant avec BB' le même angle que BE, il faut prendre de B' un arc égal à $B'E$, du côté opposé à $B'E$, savoir, à cause de $B'C = B'A$, il faut prendre de C vers B un arc égal à AE: mais, à cause des parallèles AD, BE, on a $AE = DB$, et, à cause que $CD = JB$, on a aussi $DB = CJ$, donc $AE = CJ$, et la droite qu'on doit mener par B passe par le point J. Il en est de même de la troisième droite, car on a $AF = CD = BJ$, $AC' = C'B$, donc $C'F = C'J$, et par suite la droite CJ fait avec CC' le même angle que CF. Ce qui démontre le théorème.

On peut aussi le faire dépendre d'une proposition plus générale et très facile à démontrer. Voici de quelle manière.

Soit A, B deux points et AO, BO deux droites fixes. Posons $OAB = \alpha$, $OBA = \beta$. Par les points A et B menons deux parallèles AD, BE formant un angle θ avec AB; puis par les mêmes deux points menons deux nouvelles droites AJ, BJ également inclinées que les deux parallèles sur les droites fixes AO, BO, respective-

*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ème série, t. II (1863), p. 132.

**) Giornale di Matematiche, vol. I (1863), pp. 208 e 354; oppure queste OPERE, t. I, p. 73.

***) È il teorema dell'A. sopra riprodotto. [N. d. R.].

†) Il lettore è pregato di costruirsi le figure. [N. d. R.].

ment. On aura évidemment

$$JBA = 2\beta + \theta, \qquad JAB = 2\alpha - \theta,$$

et par suite

$$AJB = 180° - 2(\alpha + \beta) = 2AOB - 180°.$$

Donc l'angle des deux droites AJ, BJ est indépendant de celui que forment avec AB les deux parallèles AD, BE. Il s'ensuit que, quand la direction de ces deux droites varie, le point J se meut sur une circonférence, passant par les deux points A et B *). De cette propriété générale découle immédiatement le théorème; car, lorsque les deux parallèles se superposent le long de AB, le point J se trouve en C, au sommet d'un triangle ABC dont les bissectrices en A, B sont AO, BO, et dont par suite CO serait la troisième bissectrice. Ainsi la circonférence en question passe par ce troisième point C. Il est facile d'apercevoir l'identité de ce dernier résultat avec le théorème dont il s'agit.

Mais c'est assez pour cet objet; et je vous prie instamment de me pardonner ces faciles développements.

Pise, 7 avril 1865.

---

*) Cette propriété subsiste encore quand on substitue aux deux parallèles AD, BE deux droites concourant en un point variable d'une circonférence passant par A et B.

INDICE DEL TOMO I.

Fine del Tomo I delle Opere Matematiche di Eugenio Beltrami.